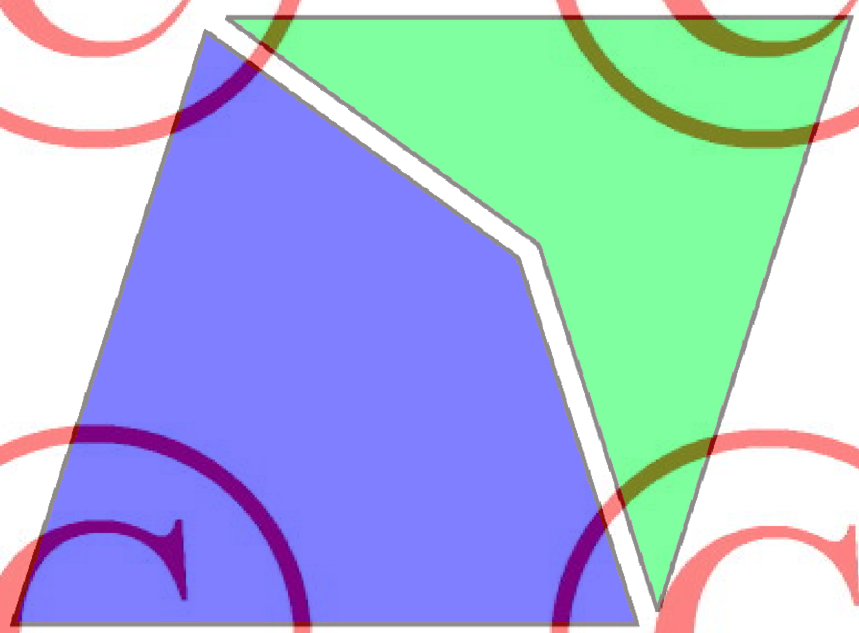
Penrose-Parkett



Pfeil und Drachen

Markus Wurster

Inhalt

Parkette in der Geometrie – die Beschäftigung mit den **„Puzzles der Unendlichkeit"** – das ist ein spielerischer, handelnder, kreativer, suchender, entdeckender und ästhetischer Zugang sowohl zur Mathematik als auch zur Kunst.

Trigonometrie braucht man dafür nicht. Aber die Muster animieren dazu, dass man sie zeichnerisch-konstruktiv nachvollzieht. Dazu braucht man Einführungen und Anleitungen.

Historische, kunstgeschichtliche oder mathematische Hintergründe kommen zur Sprache, wo sie interessant sind und die Zusammenhänge im Sinne einer „Kosmischen Erziehung" (Montessori) erfahren lassen.

Die Basis für die Parkettierungen ist das konkrete Parkettieren. Legeplättchen kann man mit Hilfe der Kopiervorlagen selbst herstellen: Auf starkes farbiges Papier kopieren, folieren und ausschneiden. Geplant ist, dass vom Autor fertige Legesätze aus Holz erhältlich sein werden. Bitte schauen Sie unter: www.markuswurster.de

Das Arbeitsbuch ist so konzipiert, dass Schüler damit möglichst selbständig arbeiten können. Es ist auch sehr gut dafür geeignet, es dialogisch (Schüler/Lehrer) durchzuarbeiten. Man kann es auch lediglich als Handbuch des Lehrers verwenden und entsprechende Einführungen und Impulse ohne Buch geben.

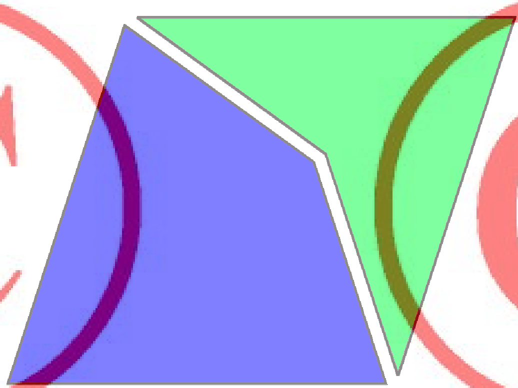
Bitte achten Sie bei der „Bindung" des Buches (Ringbuch und Folien) darauf, dass die Seiten oft besser wirken, wenn sie nur einseitig (ohne Rückseite) in den Folien stecken. Manchmal ist es auch umgekehrt. Aber es gibt einige „Lösungsseiten", die unbedingt erst nach dem Umblättern sichtbar sein sollten.

Impressum

Penrose-Parkett: Pfeil und Drachen

Penrose-Parkett mit zwei Formen – Pfeil und Drachen

Lege eigene Muster mit den zwei Formen.
Lasse deine Fantasie spielen. Was sieht gut aus?

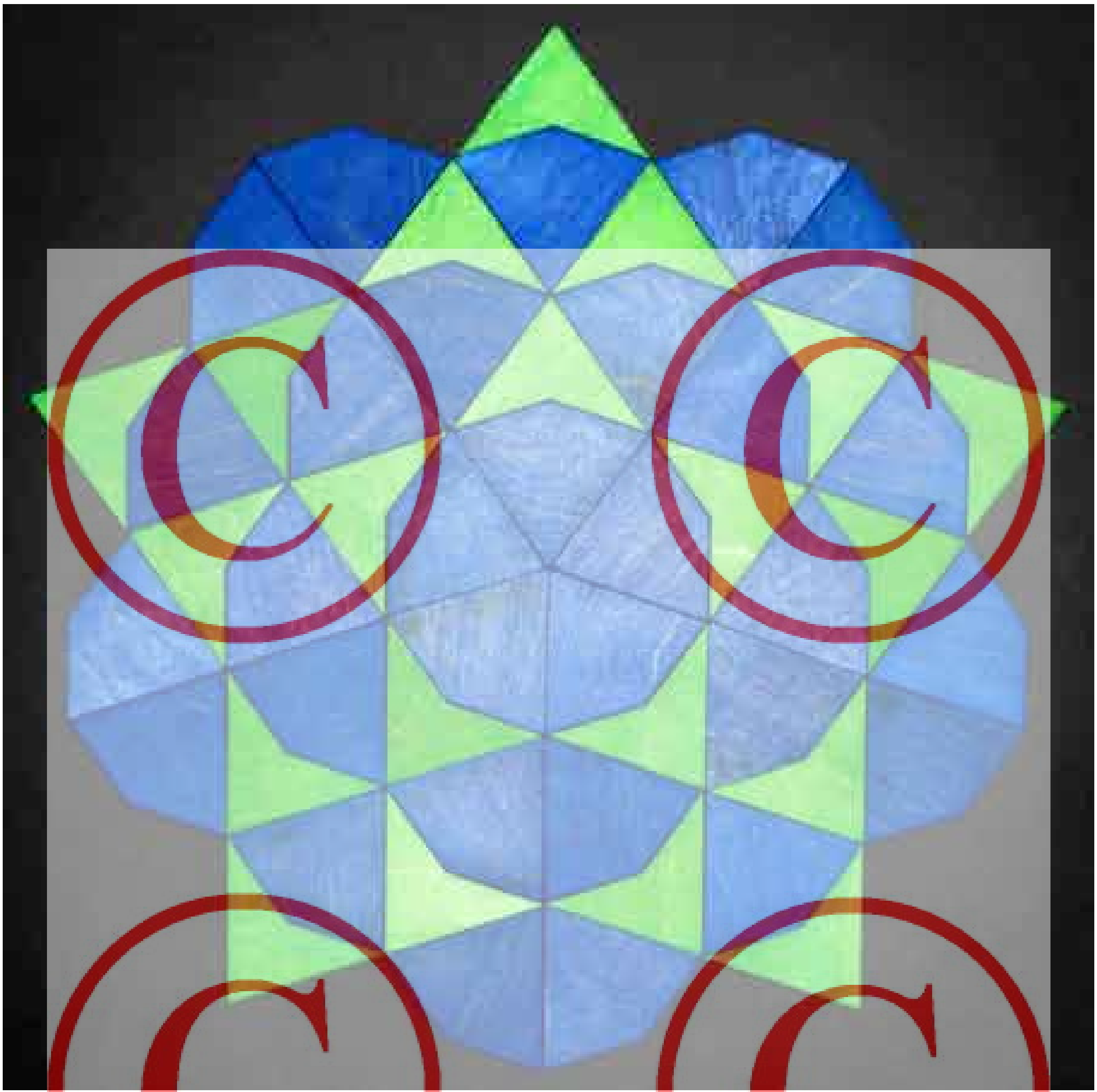


Man nennt solche Muster, bei denen man eine Fläche aus wenigen Grundformen lückenlos zusammensetzt, „Parkettierung".
Man kann auch „Pflasterung" oder „Kachelung" dazu sagen, je nachdem ob man sich eher einen Fußboden, ein Straßenpflaster oder eine gekachelte Wand vorstellt. Im Englischen gibt es dazu den Begriff „Tilings".

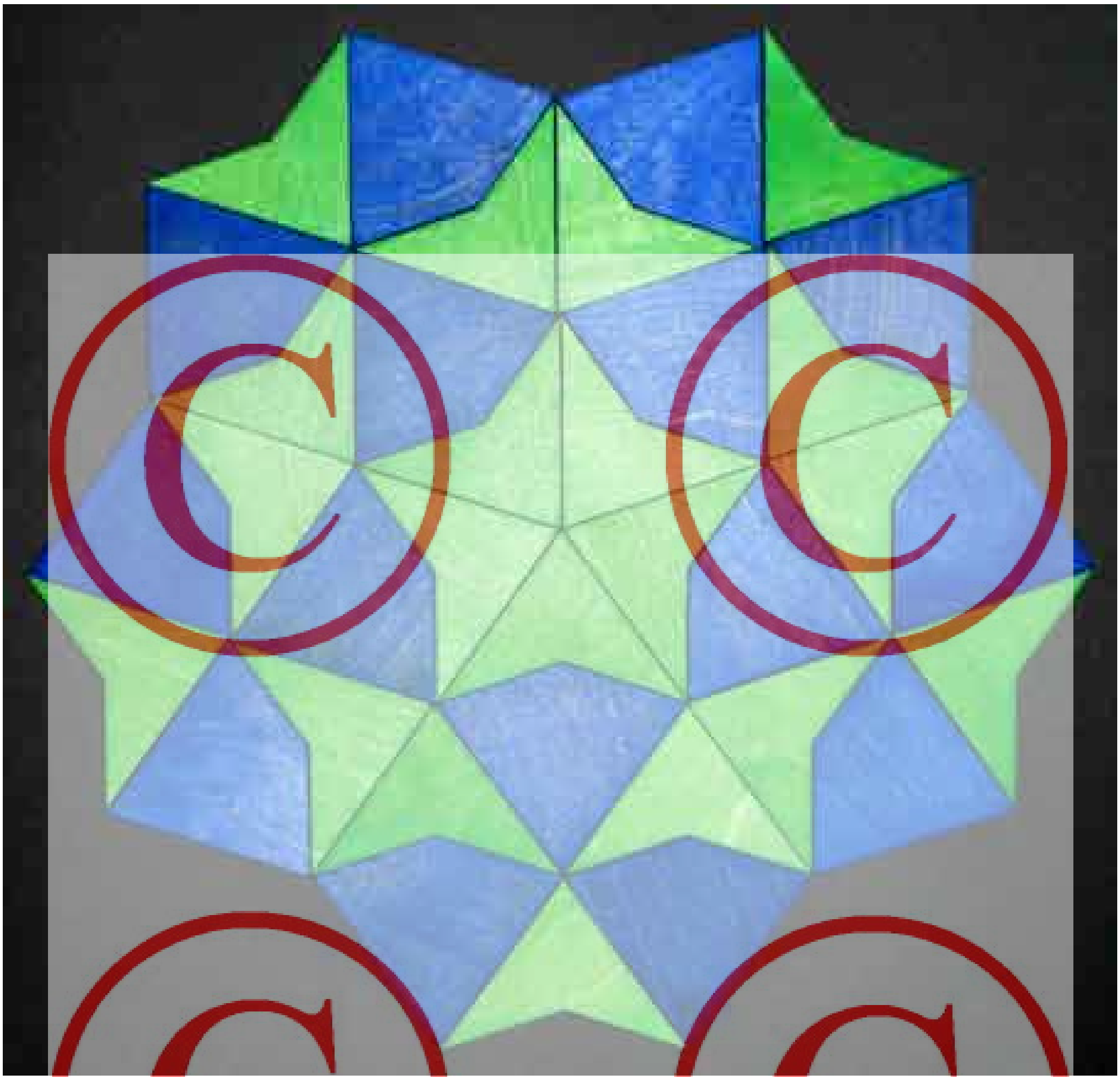
→ **Tipp:**
Verwende die Kopiervorlagen (farbig kopiert). Schneide die Formen aus und klebe dein Muster auf.

→ **Tipp:**
Du kannst auch die Beispiele auf den folgenden Seiten nachbauen.

Musterbeispiel 1



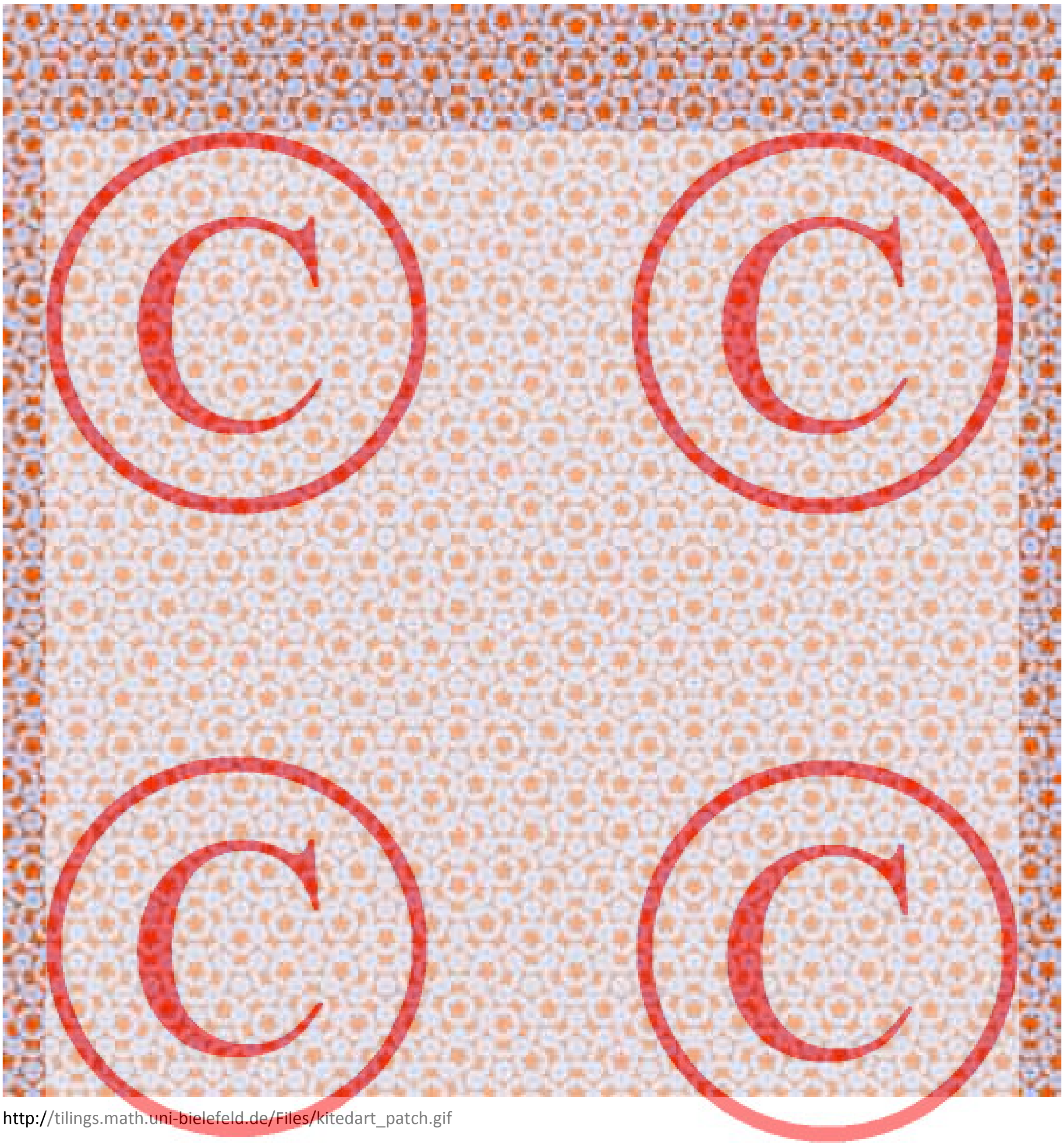
Musterbeispiel 2



Dieses Muster wurde am Computer erstellt...

Kannst du erkennen, wie das Muster zusammengesetzt ist?

Es besteht ebenfalls nur aus den beiden Formen: Pfeil und Drachen!



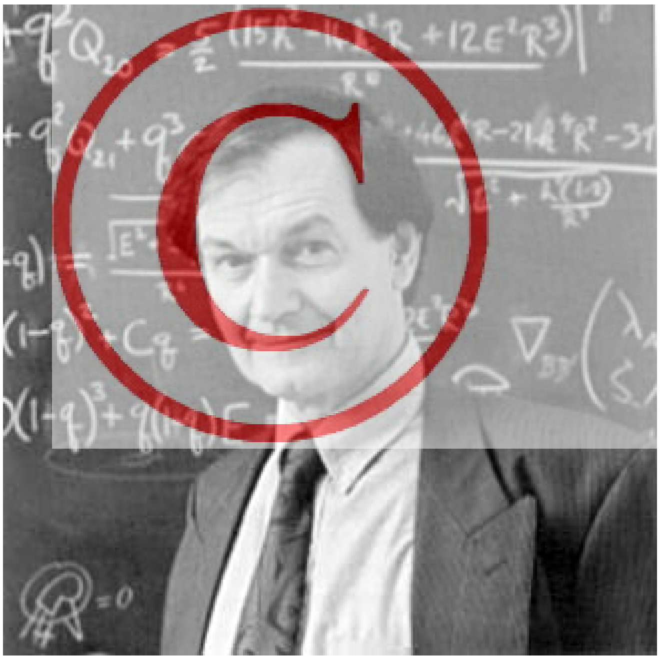
http://tilings.math.uni-bielefeld.de/Files/kitedart_patch.gif

Penrose-Parkett

Man kann mit den zwei Formen lückenlos eine große Fläche auslegen.
Egal, welche Muster man erfindet – immer wieder tauchen markante Teilmuster auf. Mal sehen sie wie Sterne aus, mal wie Ringe oder Kreise.

Manchmal entstehen aus diesen Grundformen allerdings geheimnisvolle Muster, die „aperiodisch“ sind. Das bedeutet, dass sich ein Ausschnitt nie in regelmäßigen Abständen wiederholt.
Das ist bei herkömmlichen Mustern, wie bei den meisten Fliesen oder Parketten auf dem Fußboden, anders.

Roger Penrose hat die besonderen aperiodischen Muster intensiv erforscht. Man nennt solche Muster deshalb auch „Penrose-Muster“.



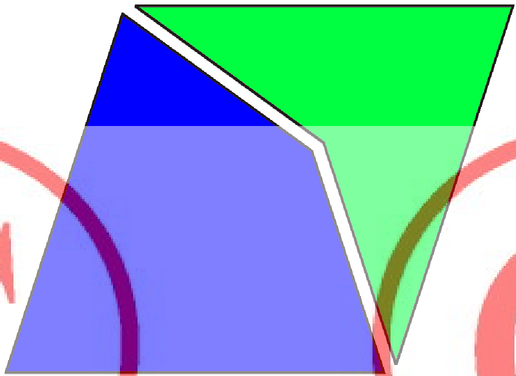
www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Penrose.html

Roger Penrose ist 1931 geboren und lebt in England. Er ist fasziniert von der Schönheit geometrischer Muster.
Was ist das Schöne in der Mathematik?
Man sagt manchmal, das Schöne sei die Einfachheit. Roger Penrose beschreibt es etwas genauer:

„Das Schöne in der Mathematik ist die *unerwartete* Einfachheit!“

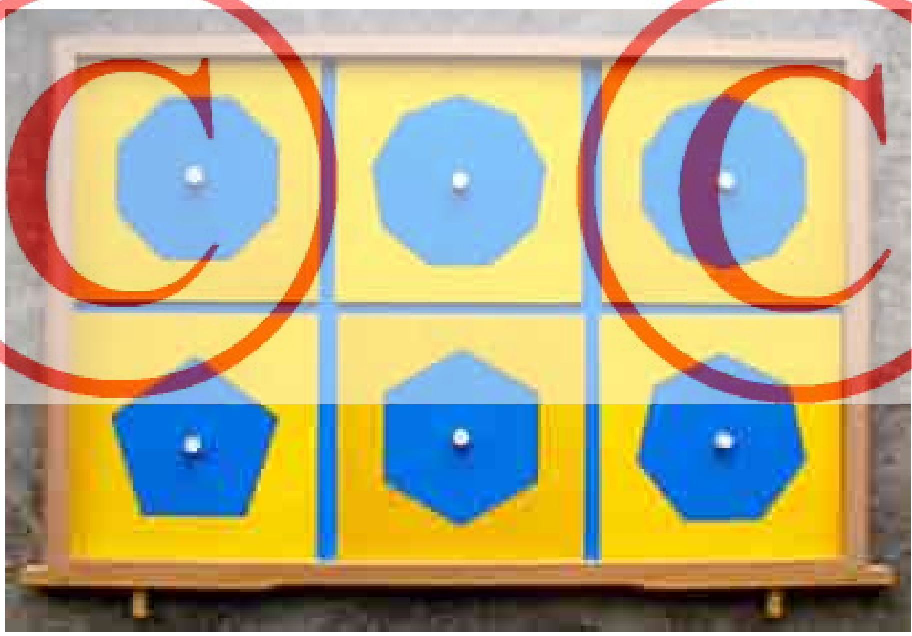
Pfeil und Drachen

Warum sind es genau dieser Pfeil und dieser Drachen?

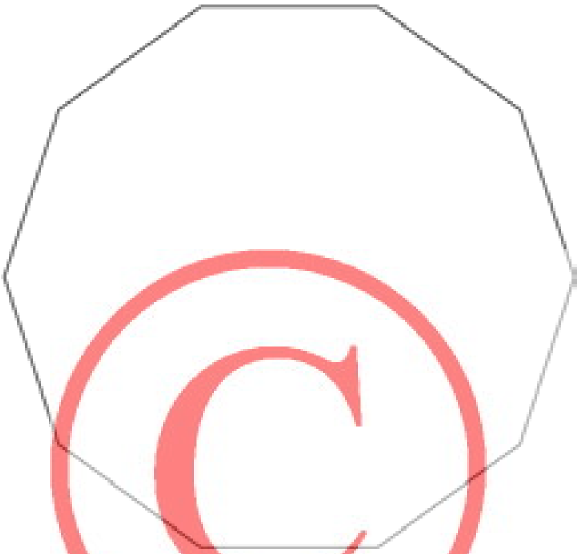


Wir kommen dieser geheimnisvollen Tatsache auf die Spur, wenn wir uns ein Zehneck näher betrachten.

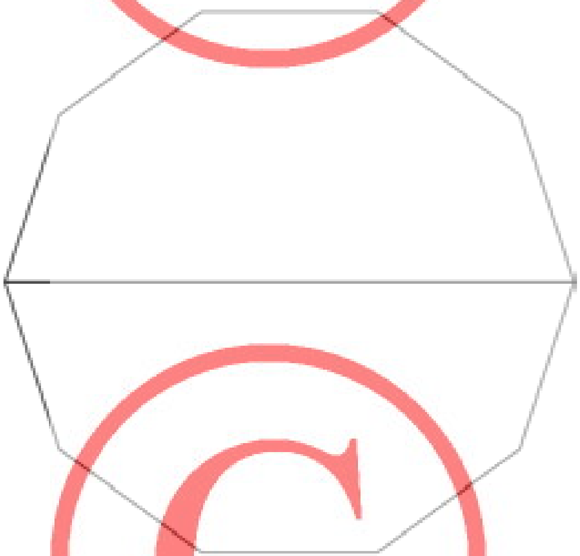
Hole dir das Zehneck aus der Geometrischen Kommode.



Pfeil und Drachen im Zehneck – erste Möglichkeit

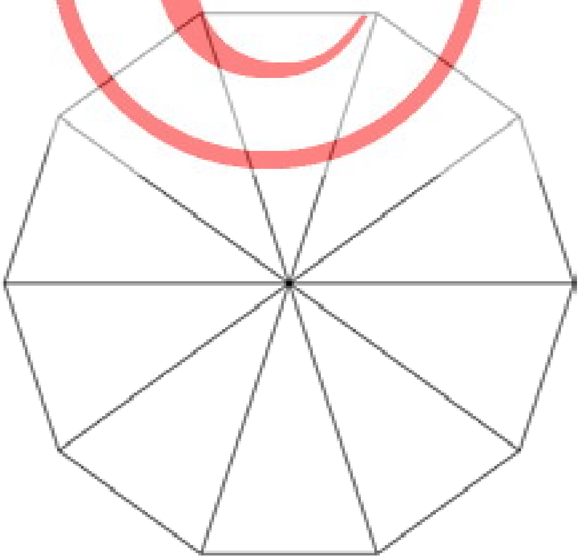


Zeichne mit der Schablone ein Zehneck.



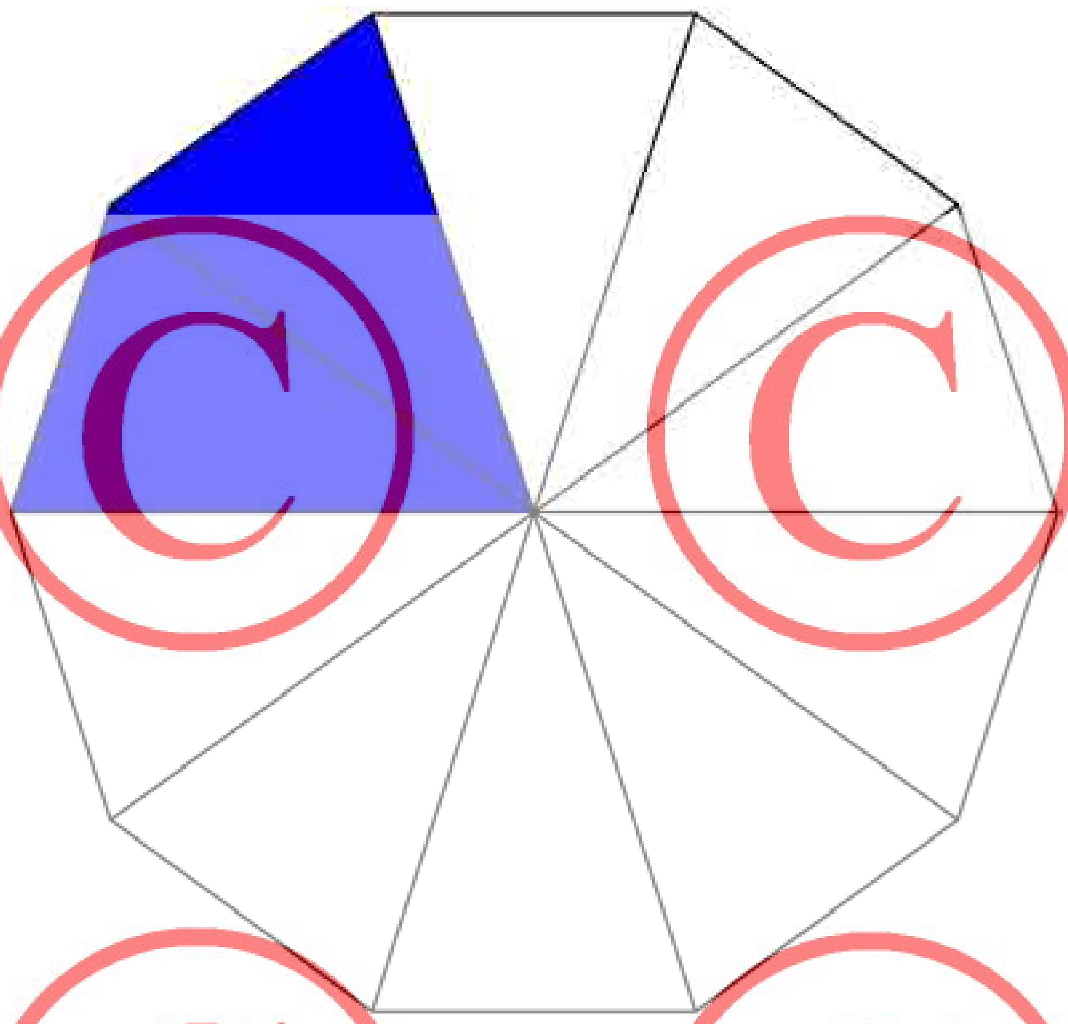
Zeichne eine Diagonale durch den Mittelpunkt ein.

Zeichne alle anderen Diagonalen durch den Mittelpunkt ein.

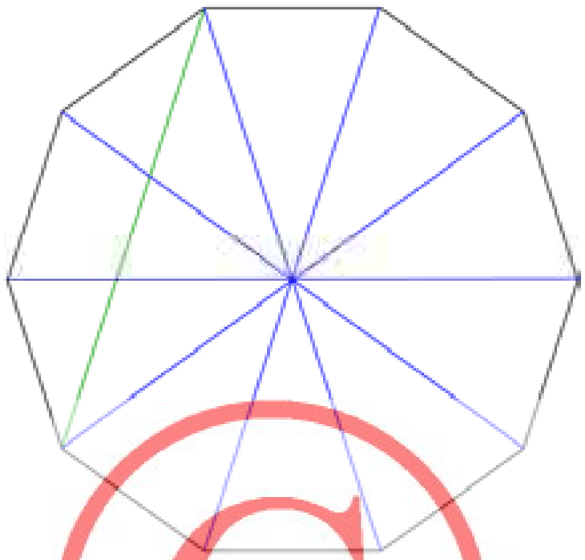


→ ***Kannst du den Drachen schon erkennen?***

Hier ist der Drachen:



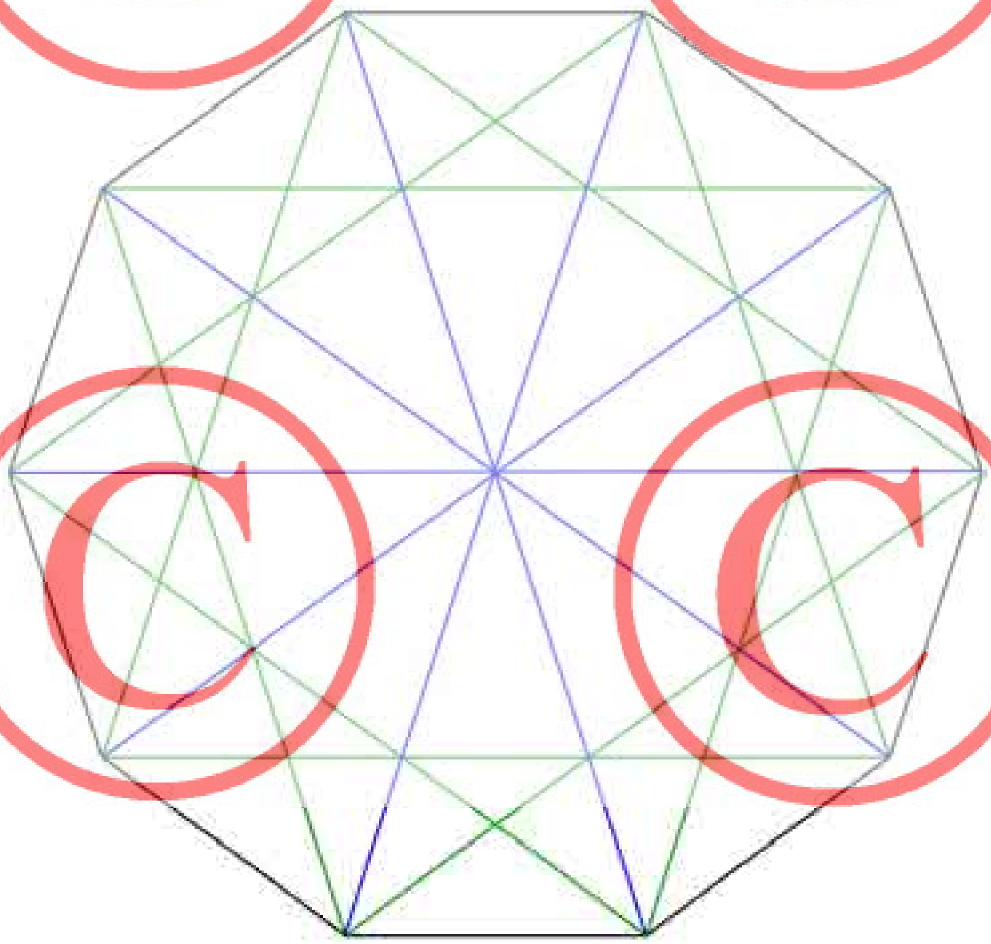
→ ***Und wo steckt der passende Pfeil?***



Ziehe wieder alle Diagonalen durch den Mittelpunkt (blau).

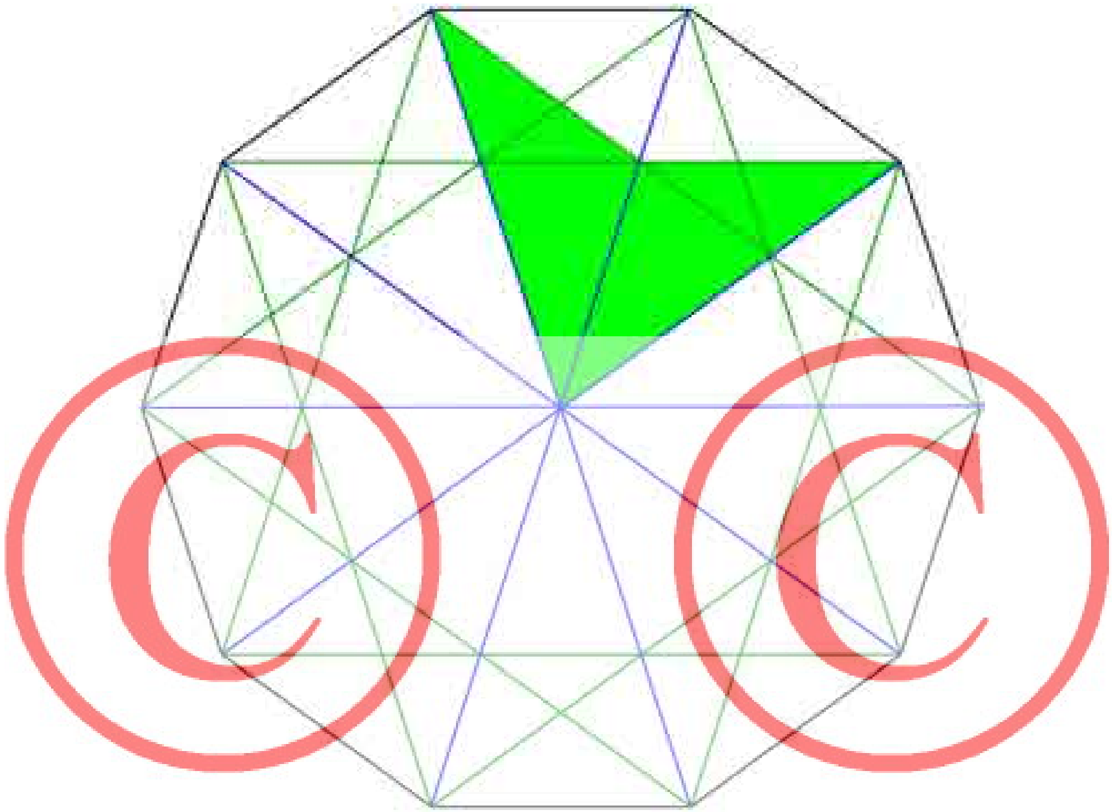
Zeichne jetzt eine Diagonale so, dass zwei Ecken ausgelassen werden (grün).

Ziehe dann alle grünen Diagonalen.

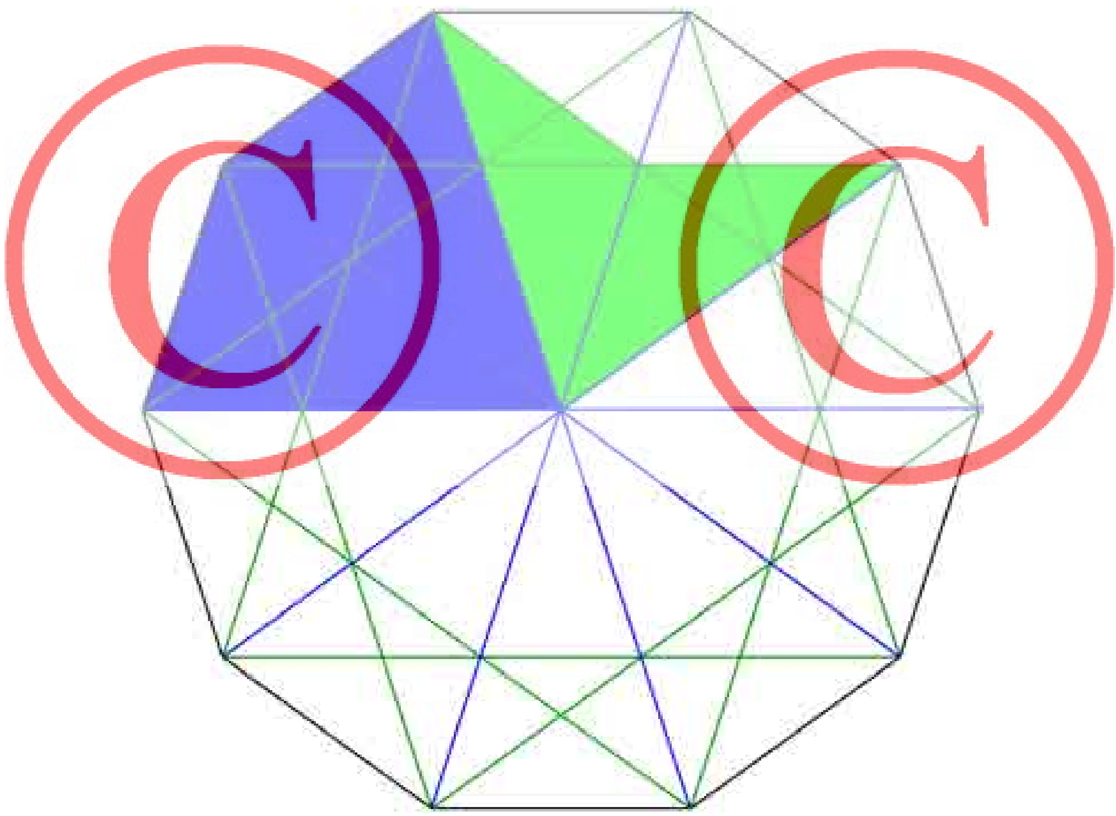


→ ***Findest du den Pfeil?***

Hier ist er:



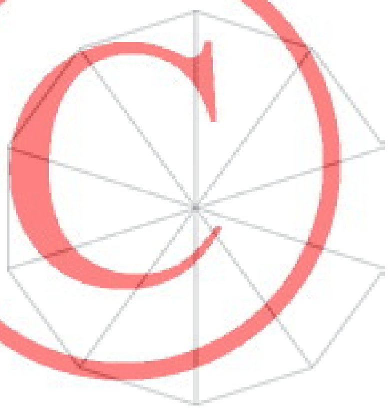
Pfeil und Drachen in einem Zehneck:

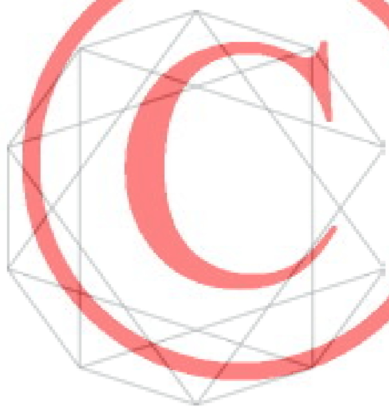


Pfeil und Drachen im Zehneck – zweite Möglichkeit

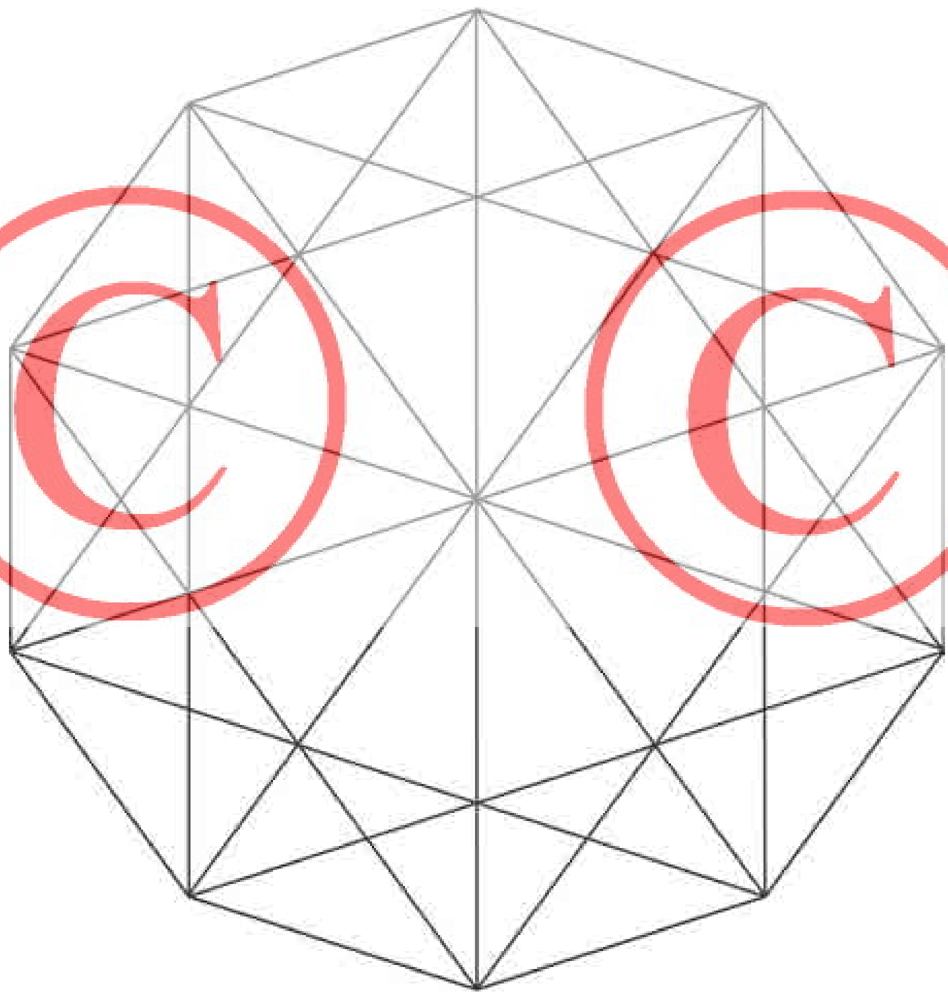
Dieses Mal suchen wir Pfeile und Drachen, die etwas kleiner sind als bei der vorigen Lösung.

Zeichne wieder alle Diagonalen ein – die Diagonalen durch den Mittelpunkt und die Diagonalen, die zwei Ecken auslassen.

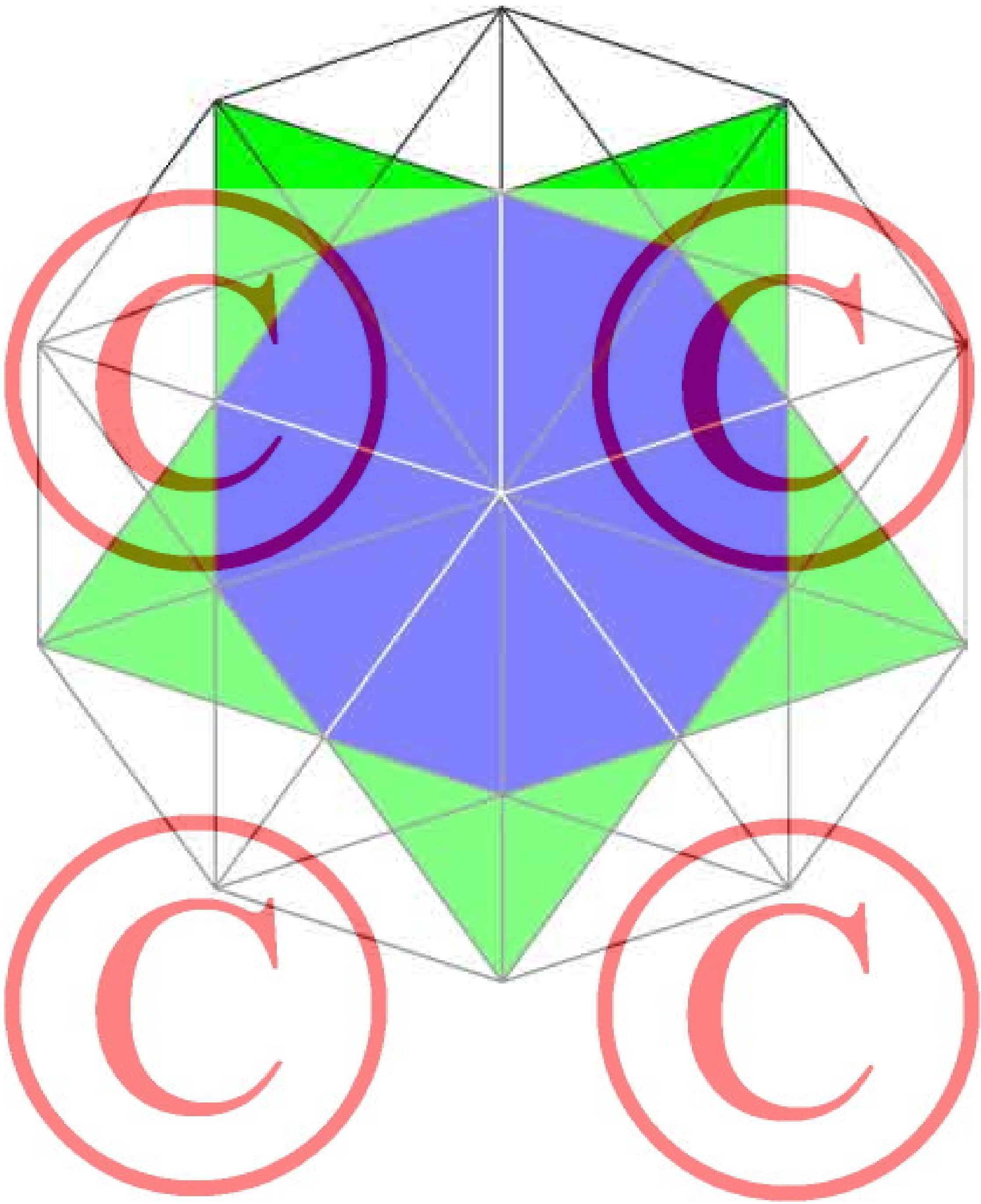




→ ***Findest du die kleineren Pfeile und Drachen?***

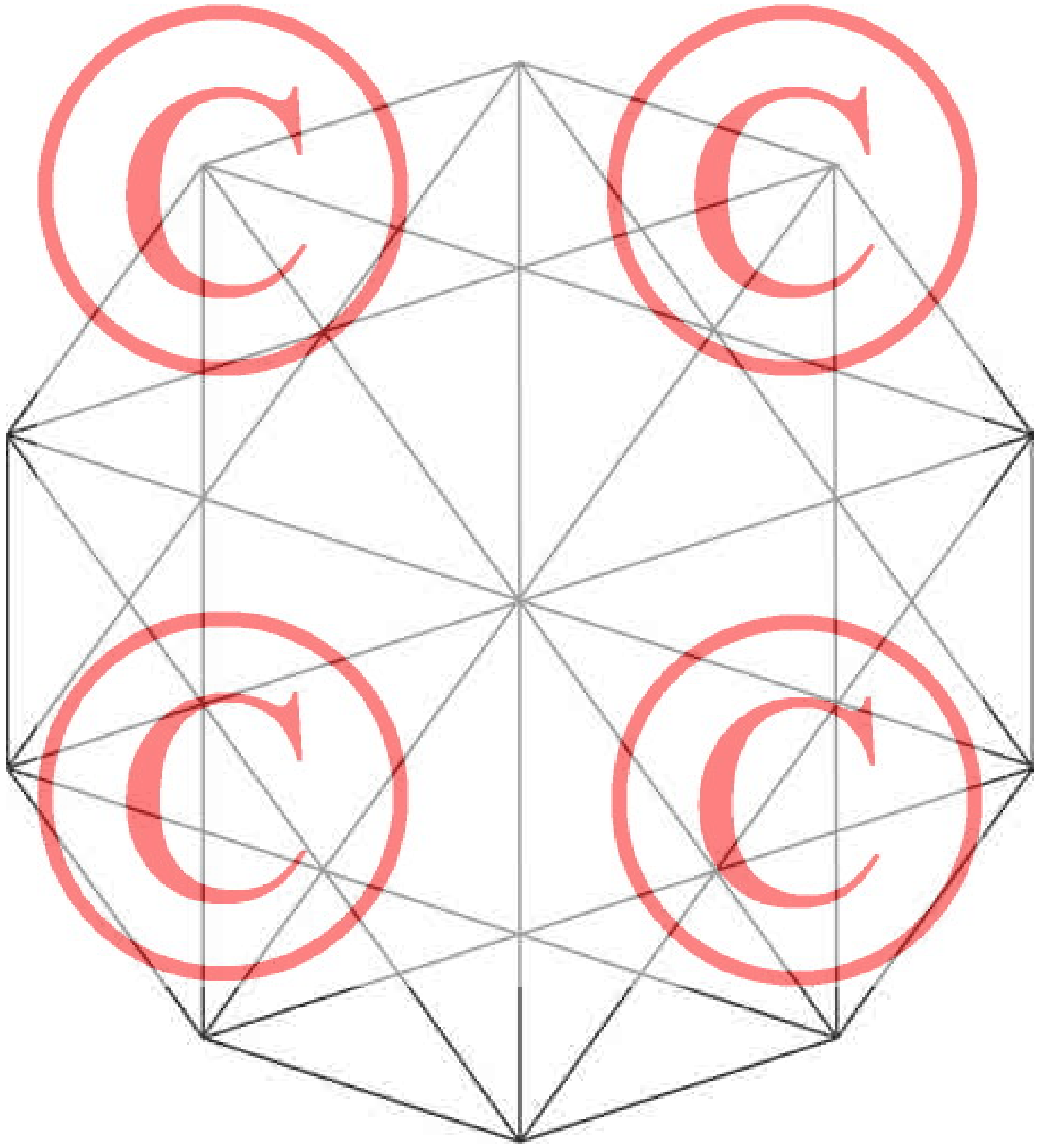


Die zweite Lösung:

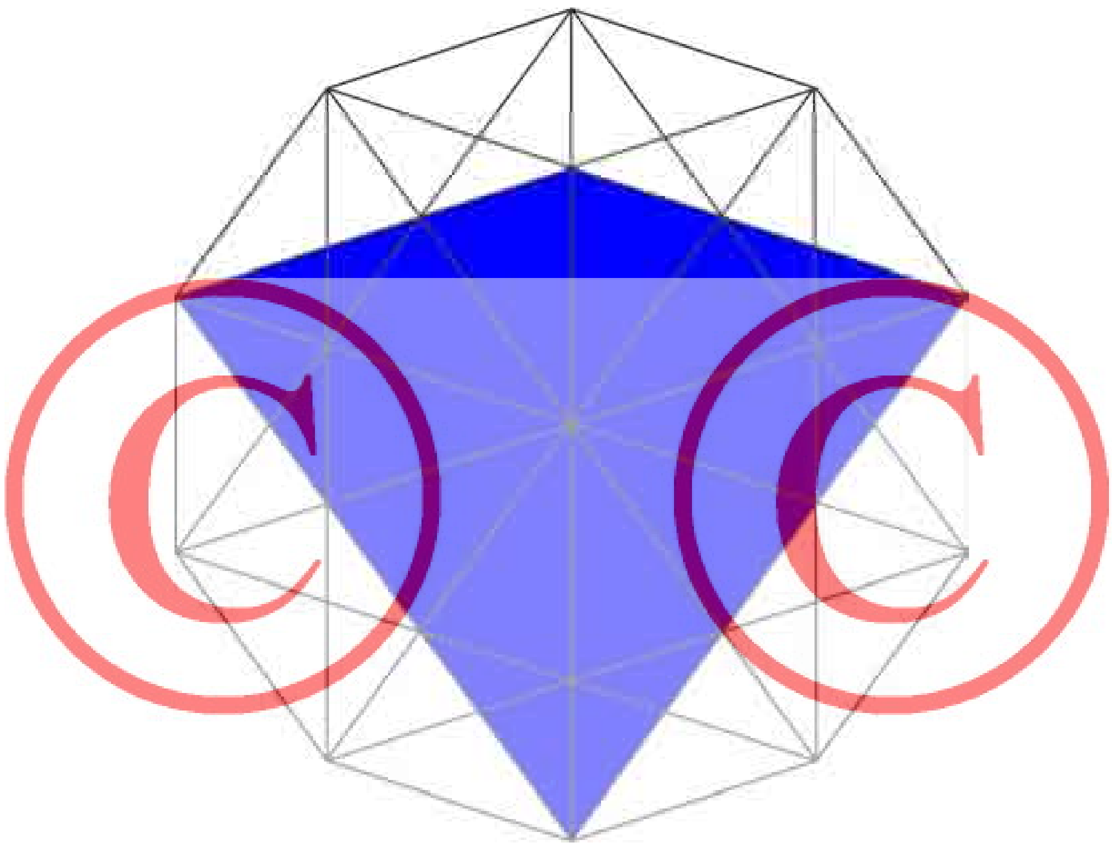


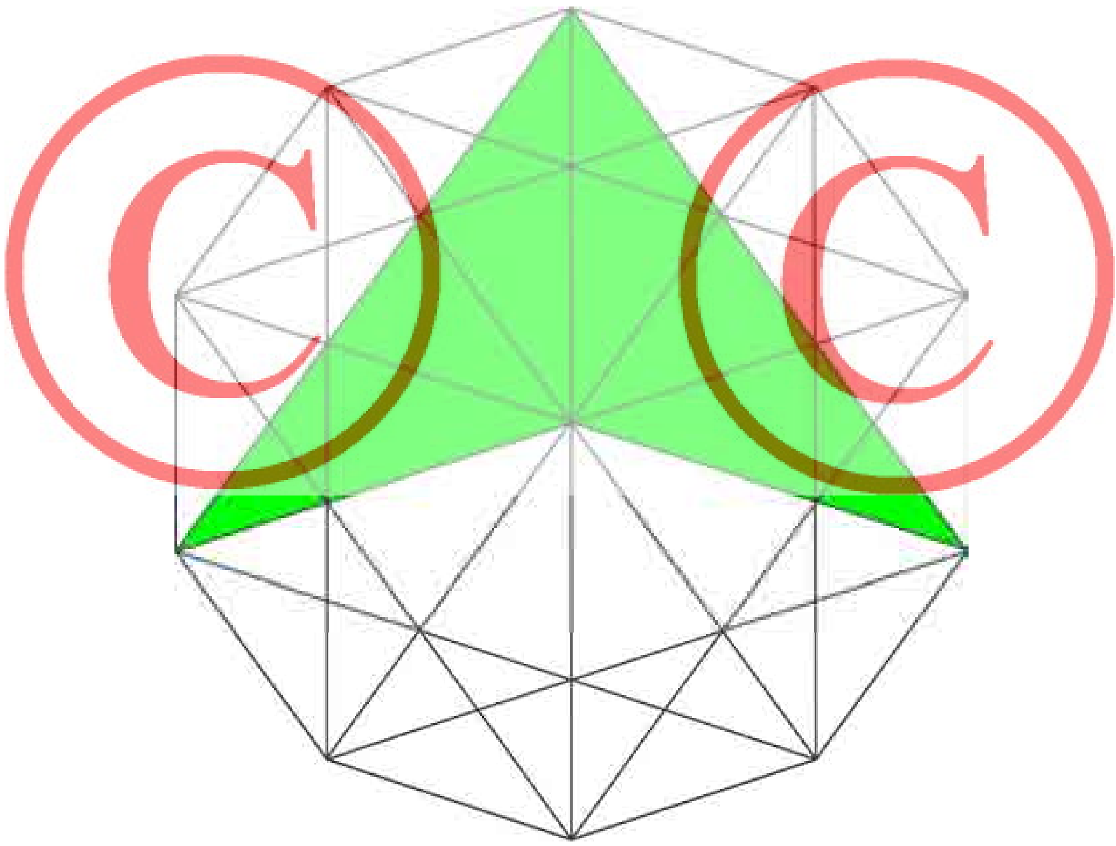
Pfeil und Drachen im Zehneck – dritte Möglichkeit

Dieses Mal suchen wir Pfeile und Drachen, die größer sind als bei den vorigen Lösungen.

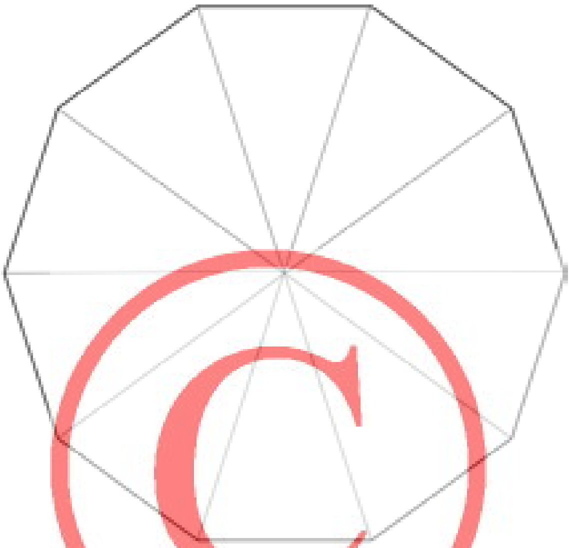


Die dritte Lösung:

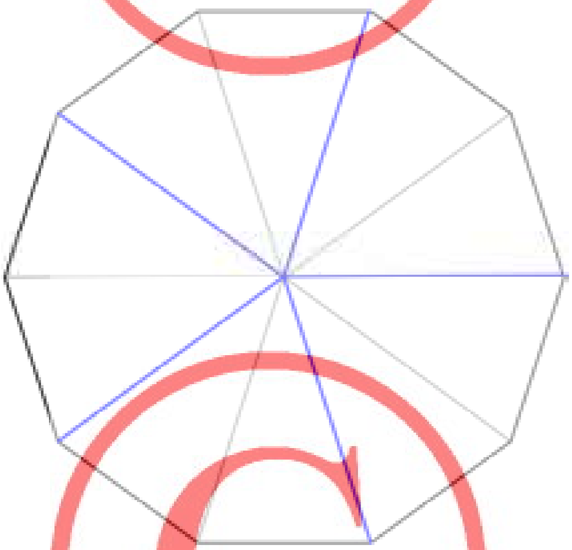




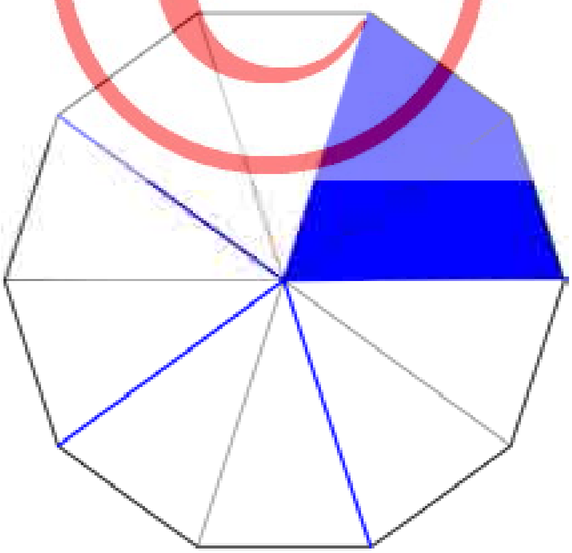
Pfeil und Drachen im Zehneck – vierte Möglichkeit



Beginne wieder mit den Diagonalen durch den Mittelpunkt.

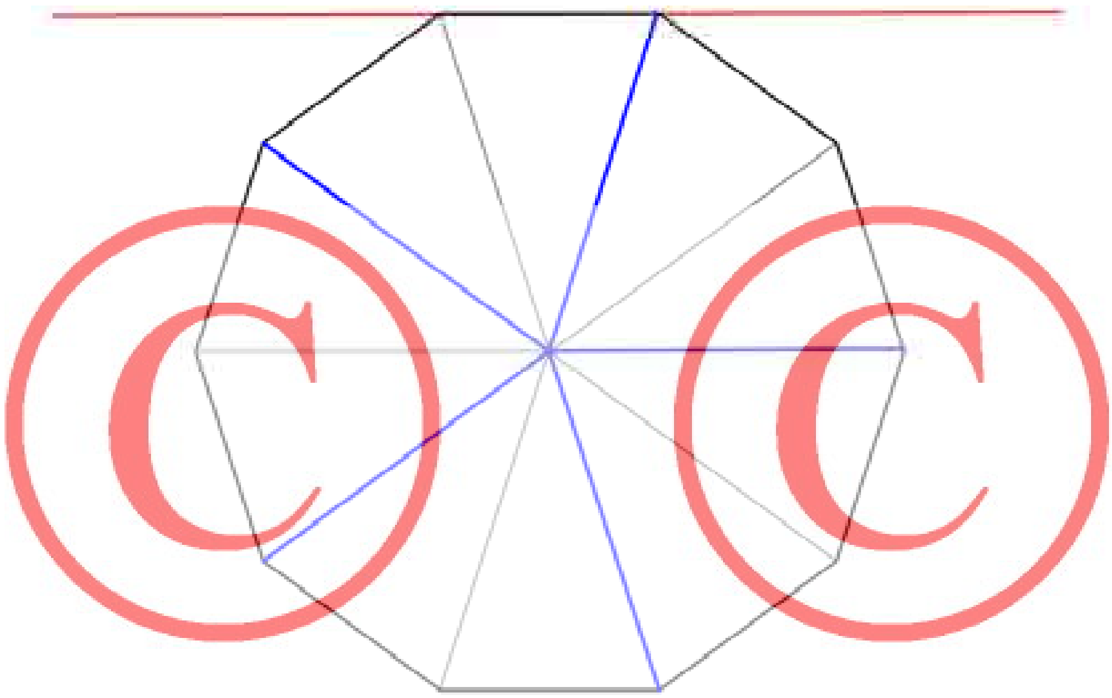


Markiere die Seitenlinien des Drachens.

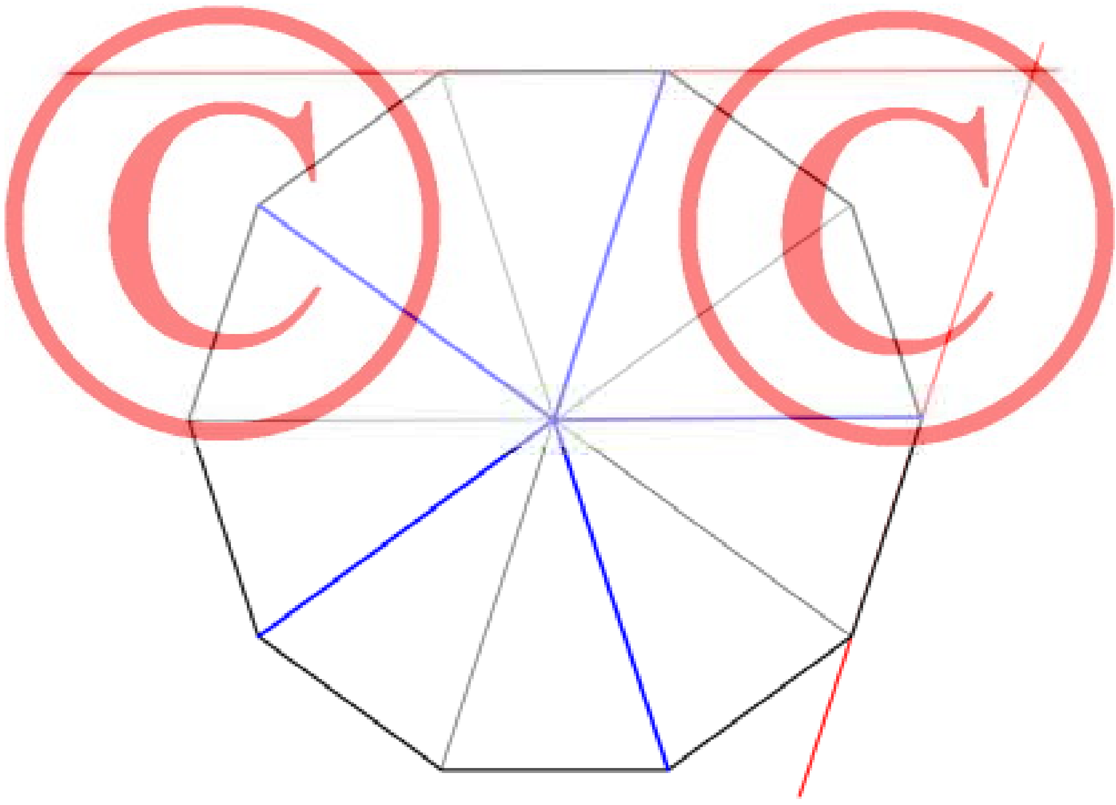


Du kannst den Drachen ausmalen.

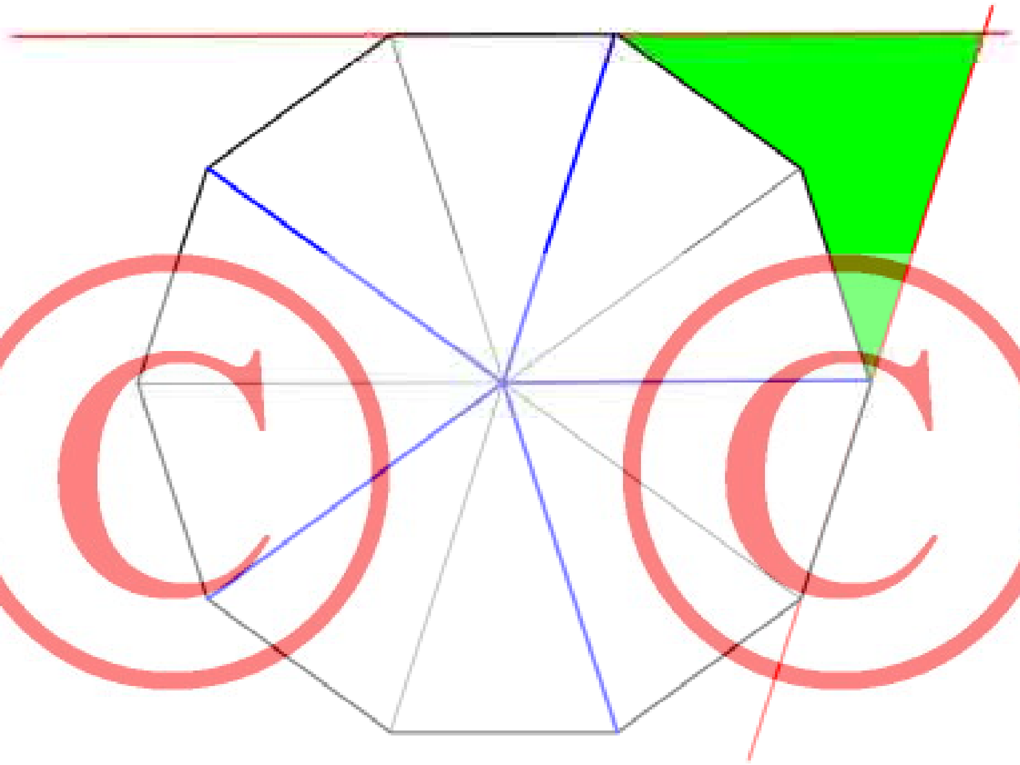
Verlängere nun eine Seitenlinie des Zehnecks (rot).



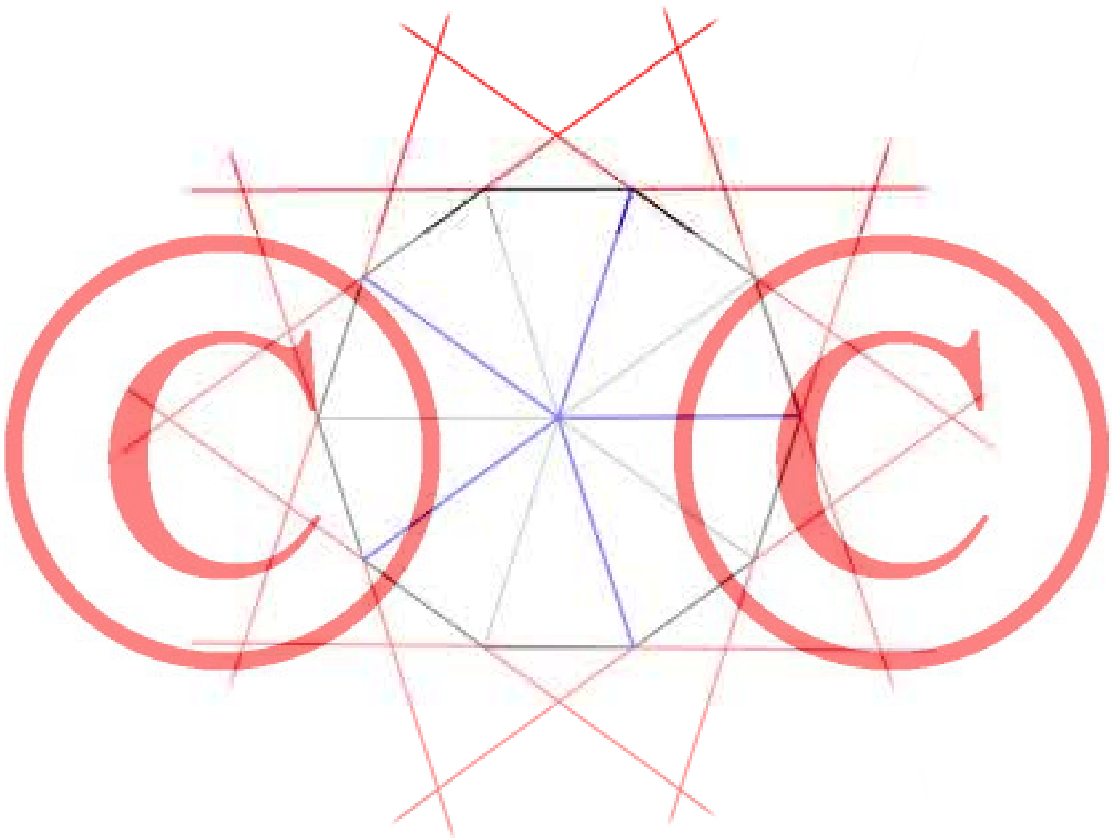
Verlängere eine zweite Seitenlinie, die um drei Segmente versetzt ist. Erkennst du schon den Pfeil?

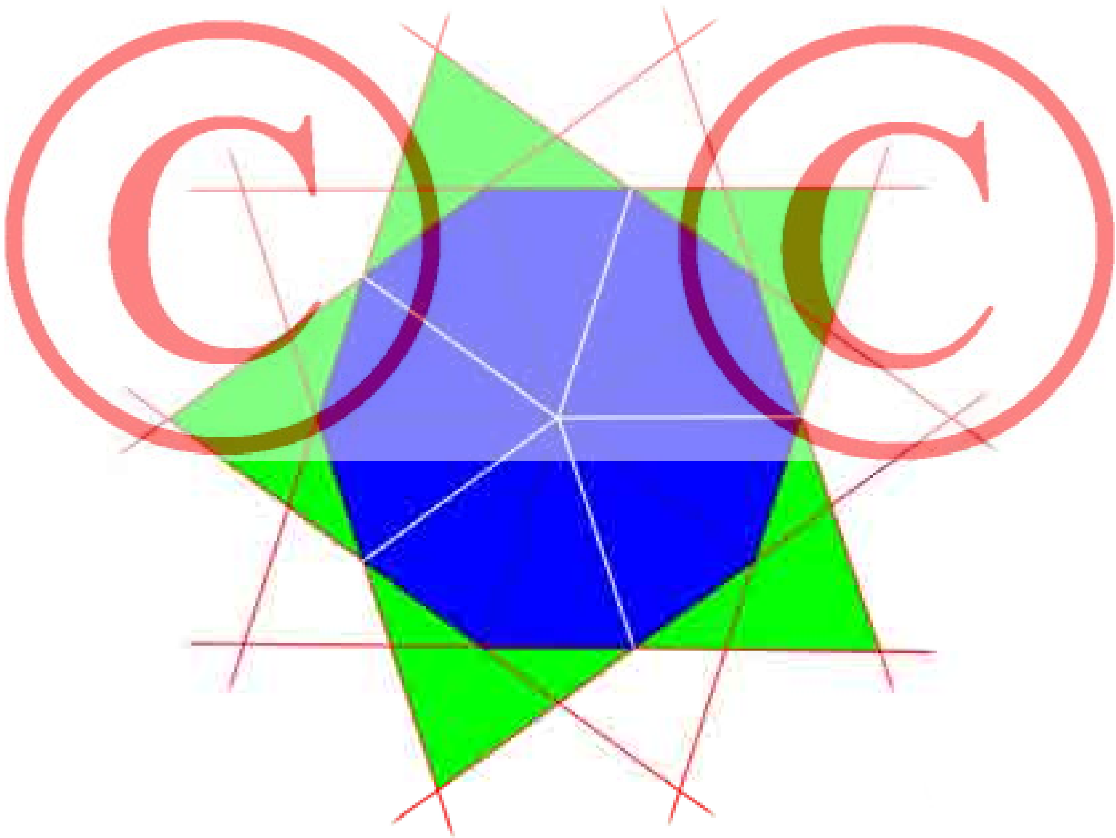


Hier ist der Pfeil:



Wenn man das ganze Zehneck so bearbeitet, ergibt sich eine besonders schöne Figur aus Pfeilen und Drachen.

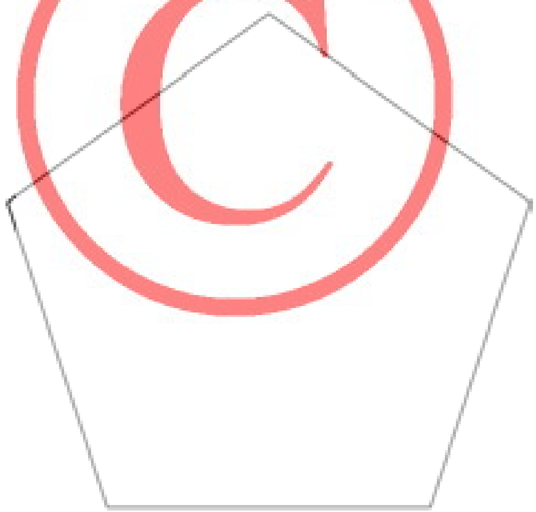


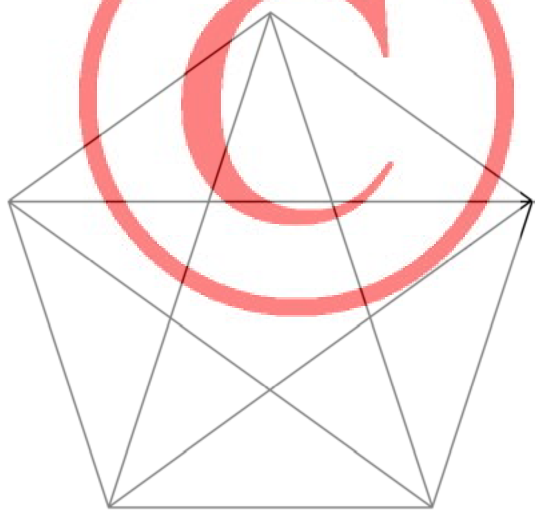


Pfeil und Drachen im Fünfeck

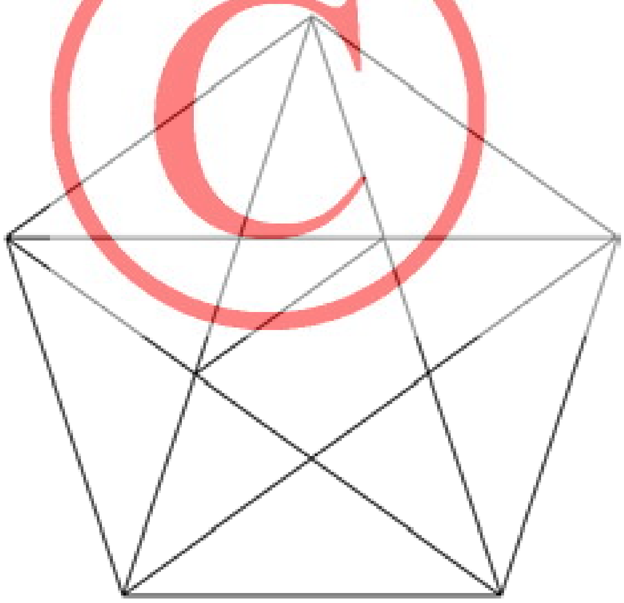
Wir haben im Zehneck jeweils fünf Pfeile und fünf Drachen gefunden – eine geheimnisvolle Fünferzahl bei den Penrose-Mustern.
Da liegt es nahe, Pfeil und Drachen auch in einem Fünfeck zu suchen.

Zeichne mit der Schablone ein Fünfeck und zeichne alle Diagonalen ein.



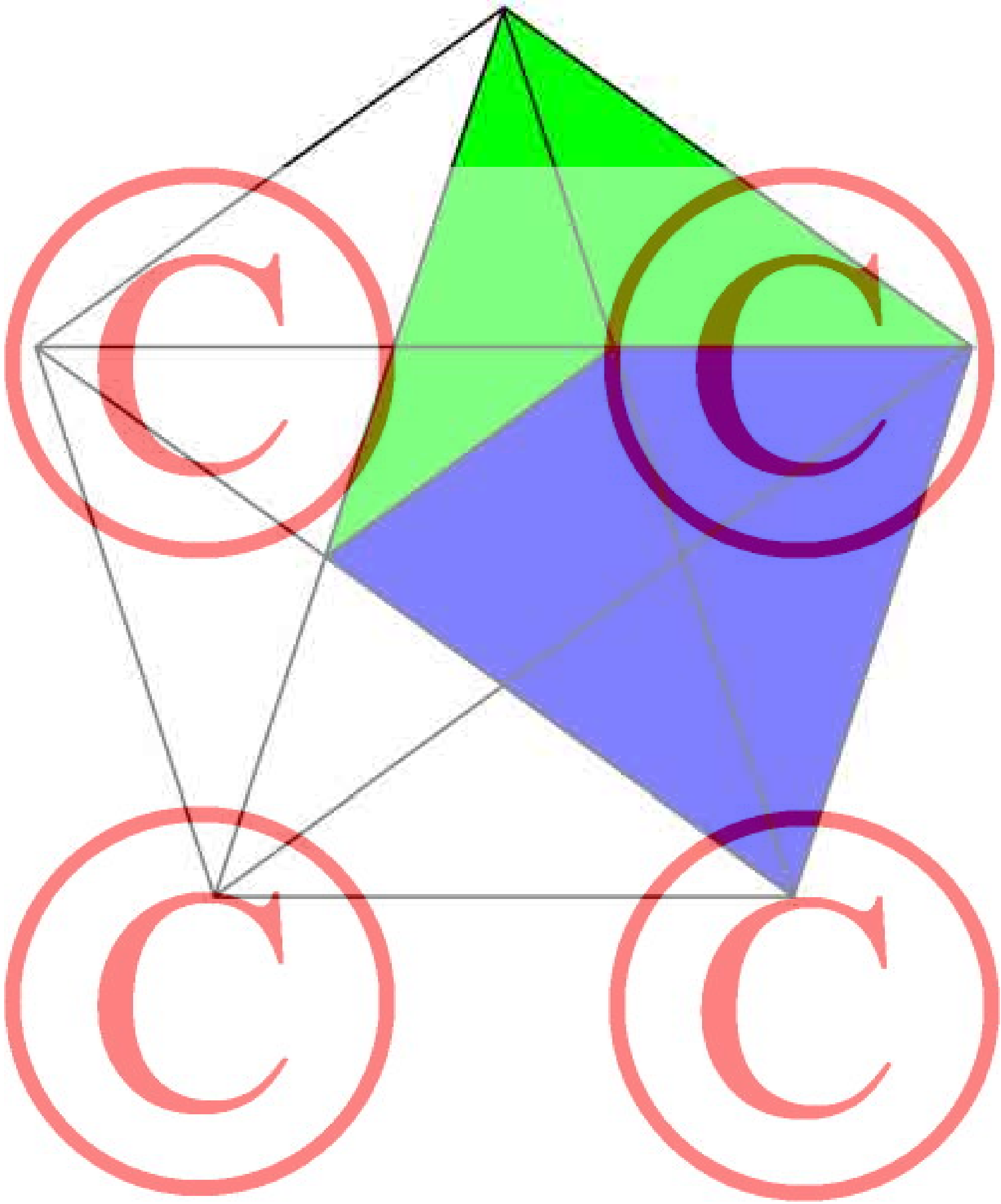


→ ***Kannst du den Pfeil und den Drachen schon finden?***

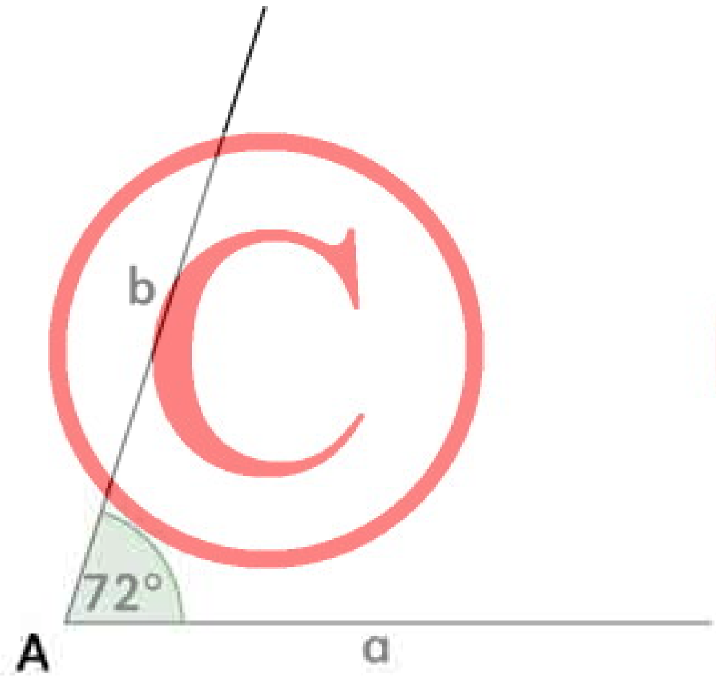


Es fehlt noch eine Linie, damit wir die Formen erkennen können. Zeichne eine Diagonale in dem kleinen Fünfeck in der Mitte ein.

Lösung – Pfeil und Drachen im Fünfeck:

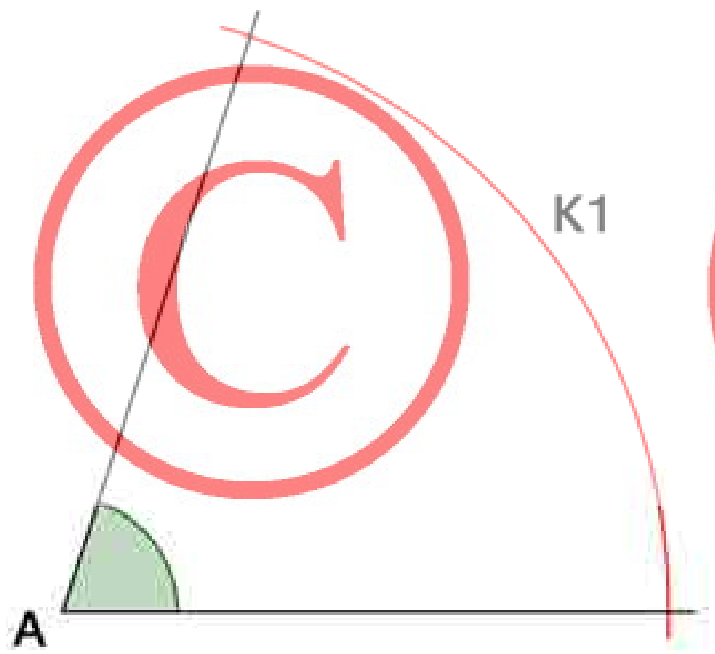


Konstruktion von Pfeil und Drachen mit Zirkel und Lineal

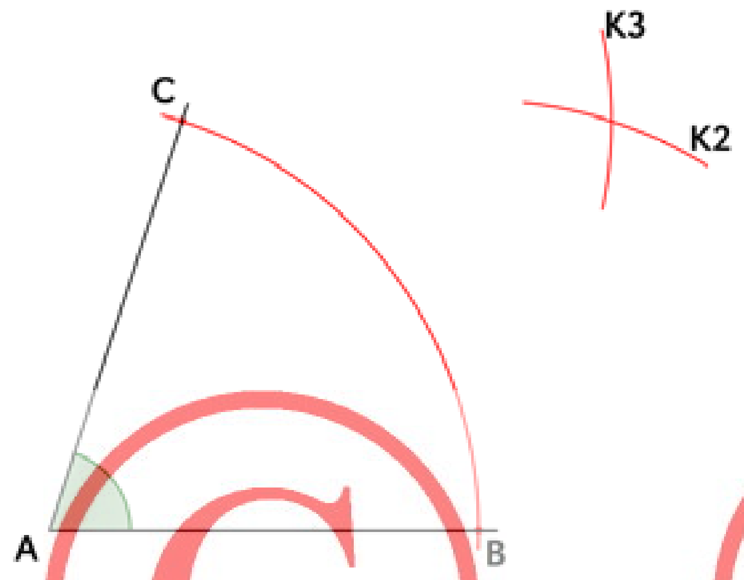


Beginne mit einer Strecke a.

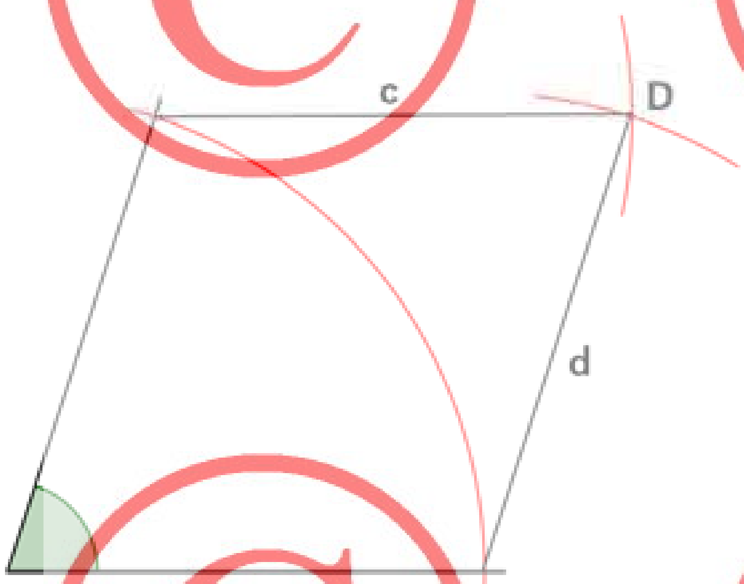
Zeichne mit dem Geo-Dreieck einen Winkel von 72°.



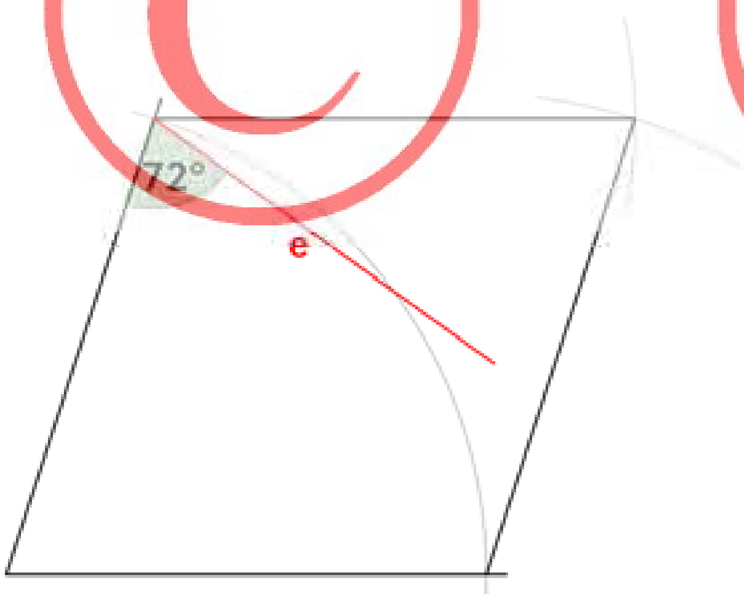
Ziehe einen Kreisbogen K1 um den Punkt A.



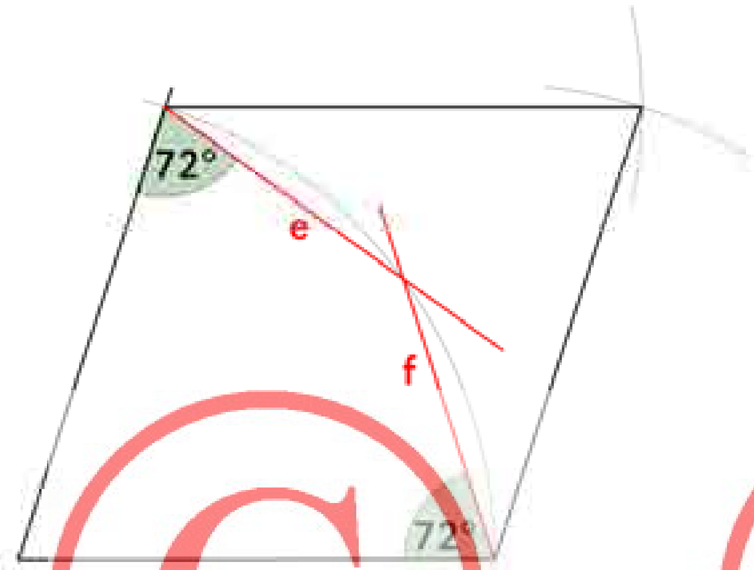
Ziehe nun mit demselben Radius die Kreisbögen K2 und K3 um die Punkte B und C.



Vervollständige die Strecken c und d.
Nun haben wir eine Raute.

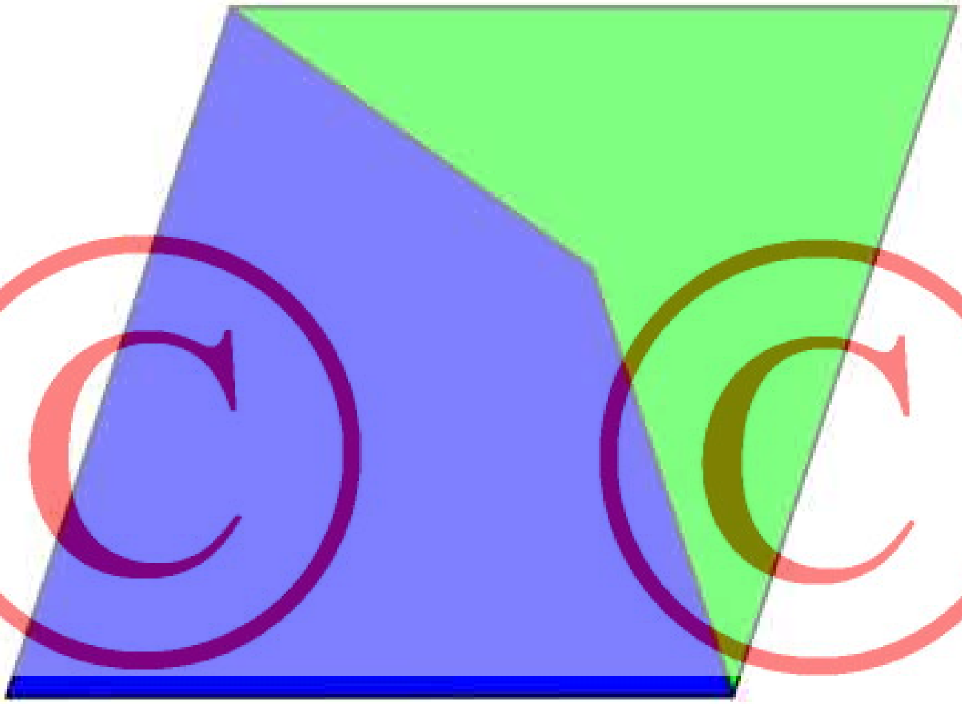


Zeichne die Linie e im Winkel von 72°.



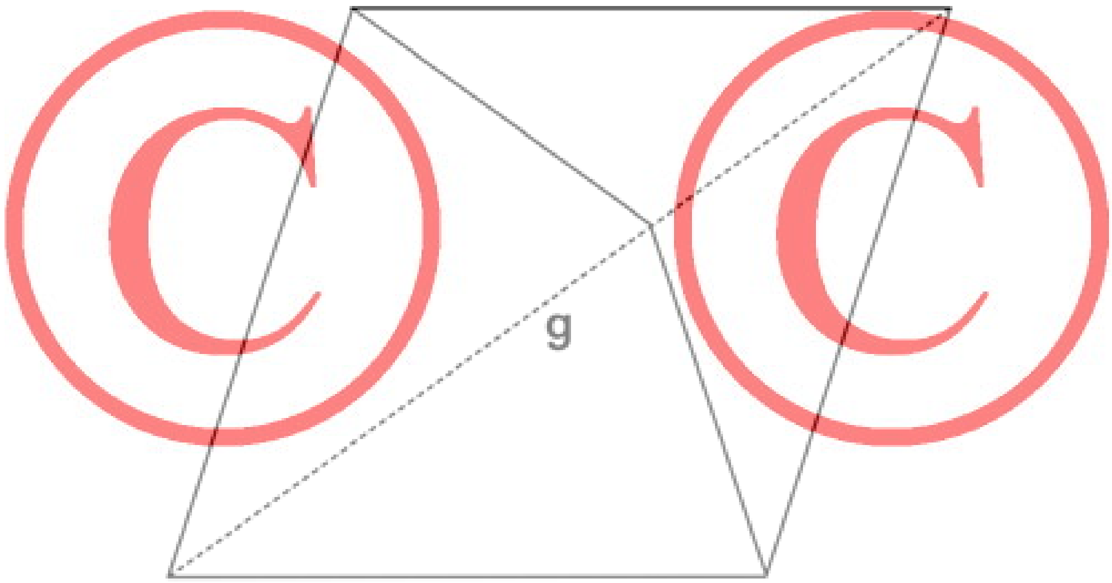
Nun genauso die Linie f.

Es entstehen Pfeil und Drachen!

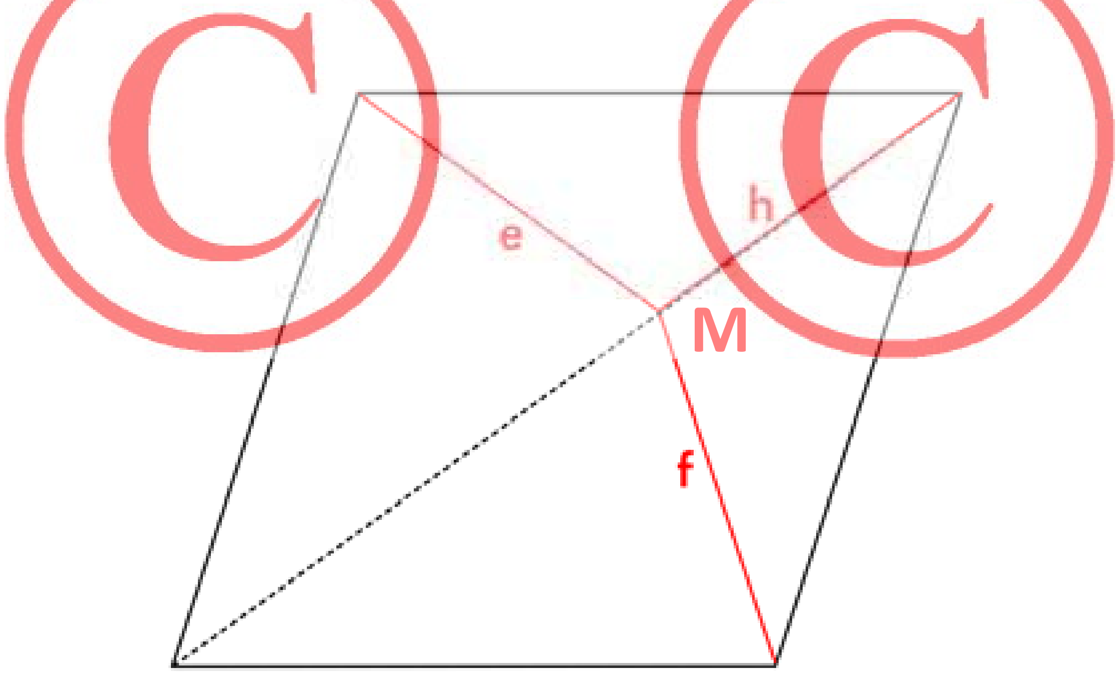


Entdeckungen –
Beziehungen zwischen Pfeil und Drachen

Konstruiere wieder eine Raute mit Pfeil und Drachen.
Zeichne die Diagonale g ein.



Steche mit dem Zirkel im Punkt M ein. Vergleiche die Strecken e, f und h. Was stellst du fest?

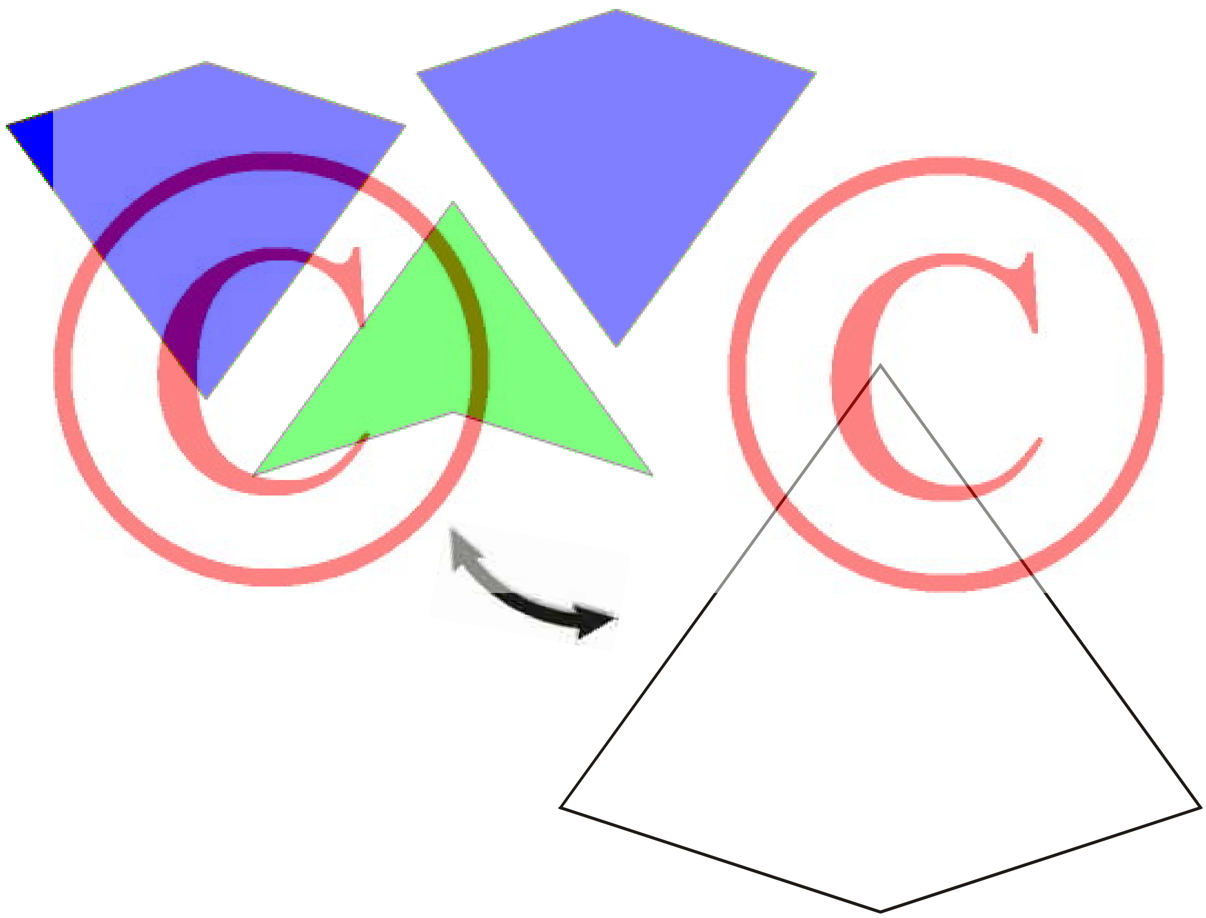


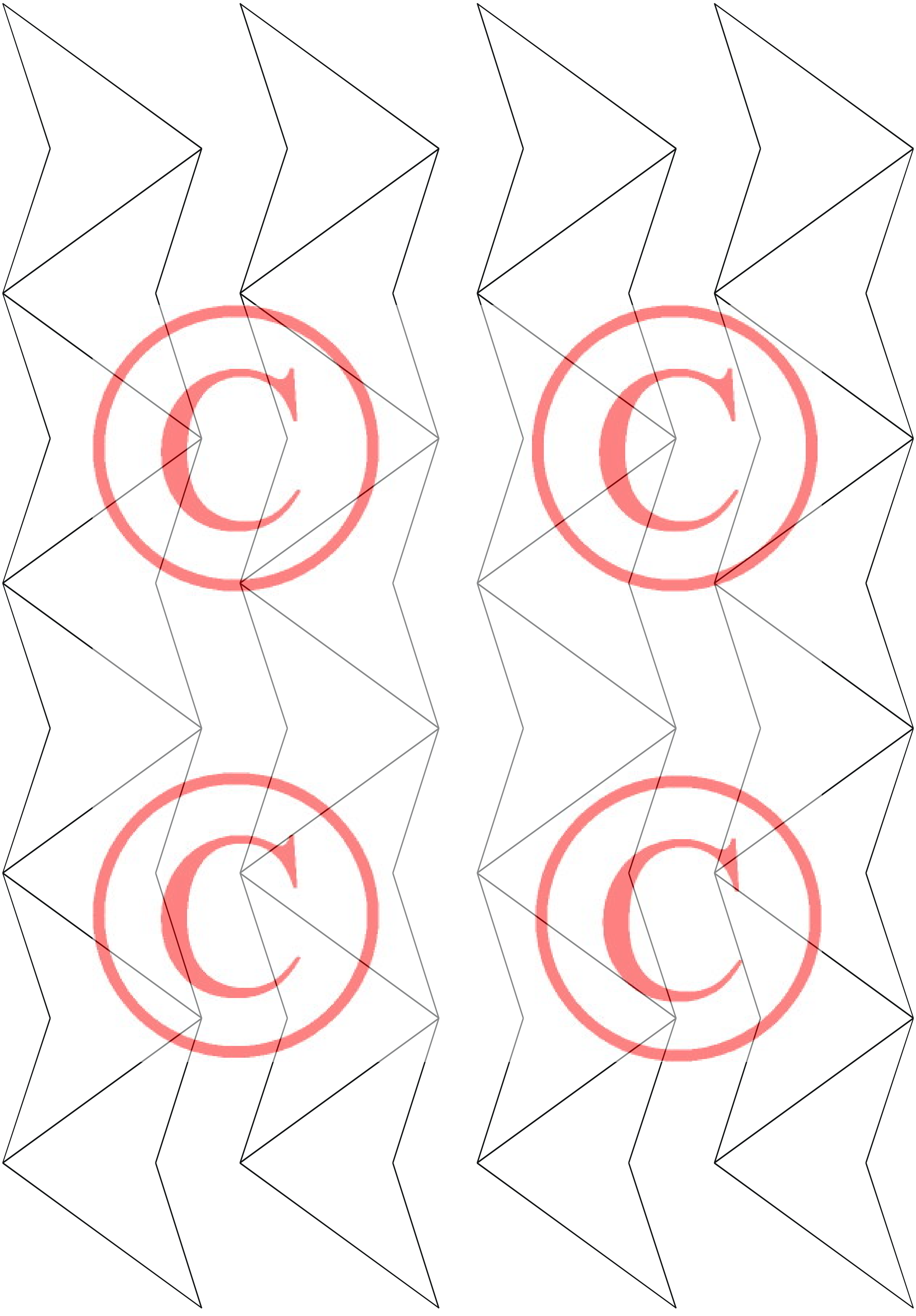
Selbstähnlichkeit – eine Knobelaufgabe

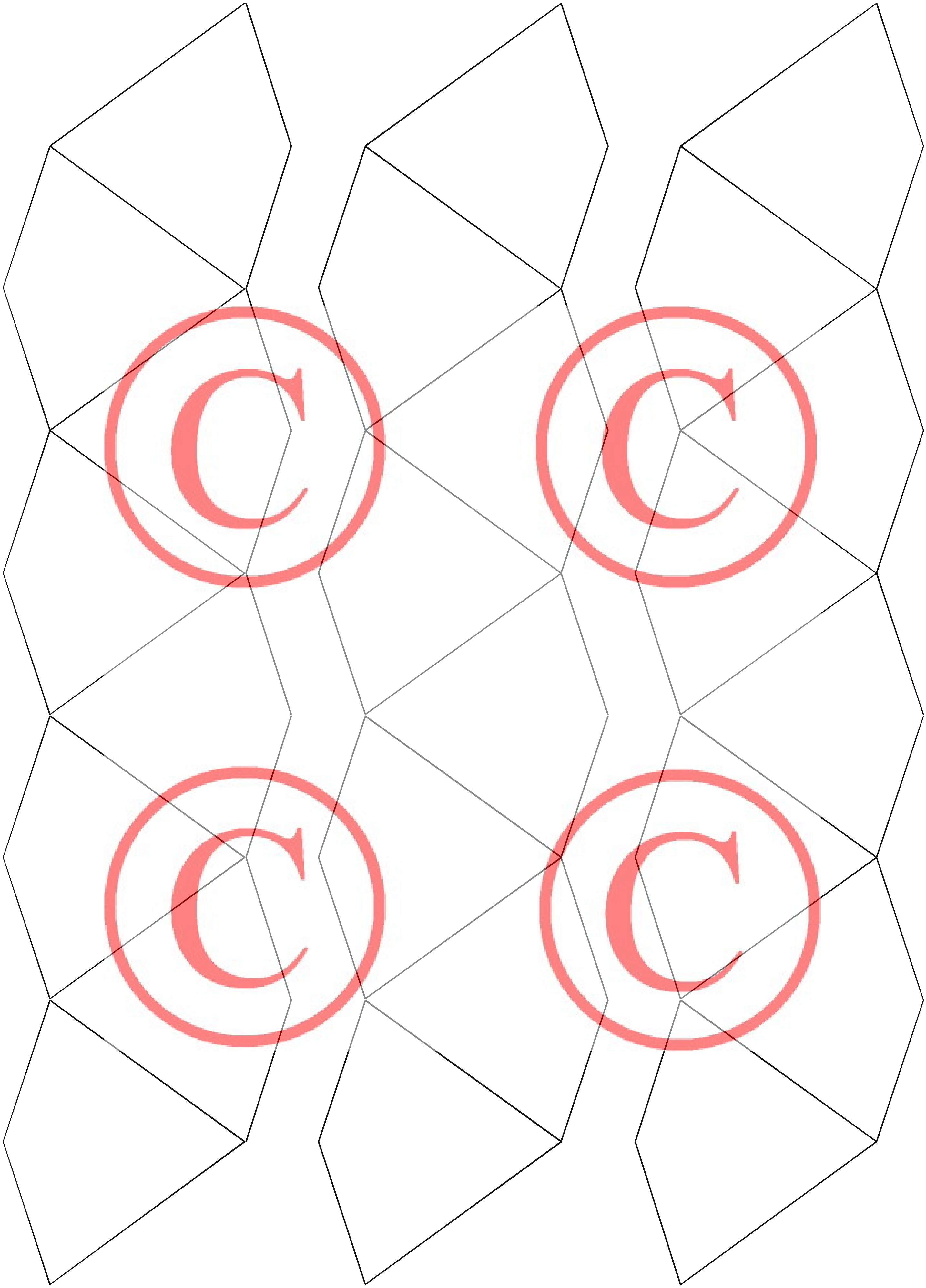
Roger Penrose zeigte eine überraschende Eigenschaft der Penrose-Formen. Man kann sich diese Formen so vorstellen, als wären sie aus denselben verkleinerten Formen zusammengesetzt.

„Ähnlichkeit" bedeutet in der Mathematik, dass zwei Formen unterschiedlich groß sind, aber dieselben Seiten- und Winkelverhältnisse aufweisen – sie sind also lediglich vergrößert oder verkleinert.

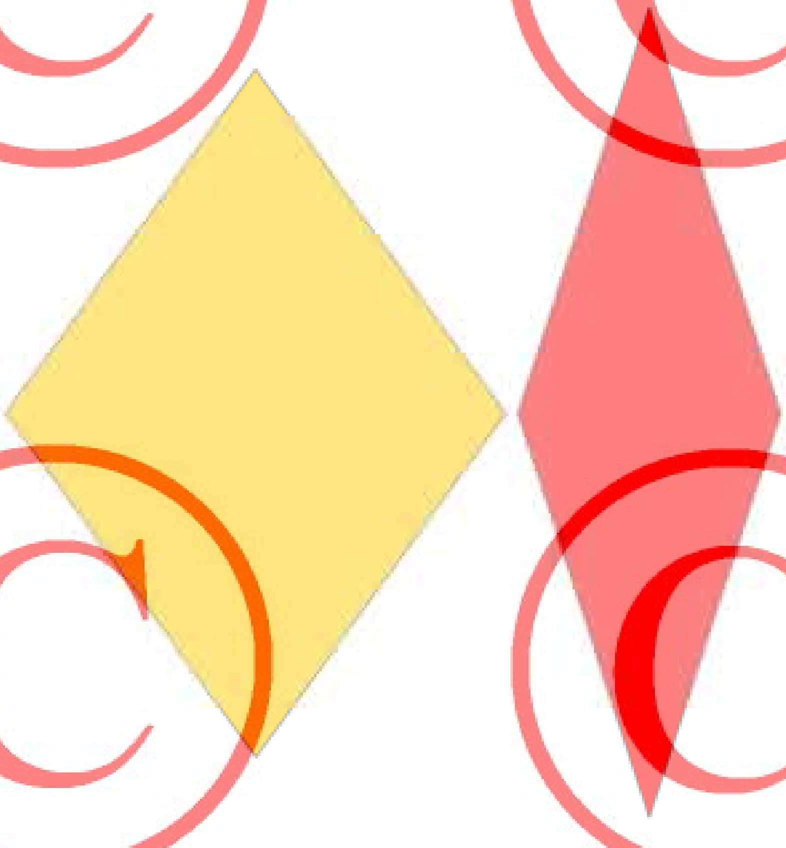
→ **Aufgabe:**
Finde heraus, wie ein Drachen aus zwei kleinen Drachen und einem Pfeil zusammengesetzt ist. Verwende die Plättchen und zeichne deine Lösung auf.







Penrose-Parkett



Zwei Rauten

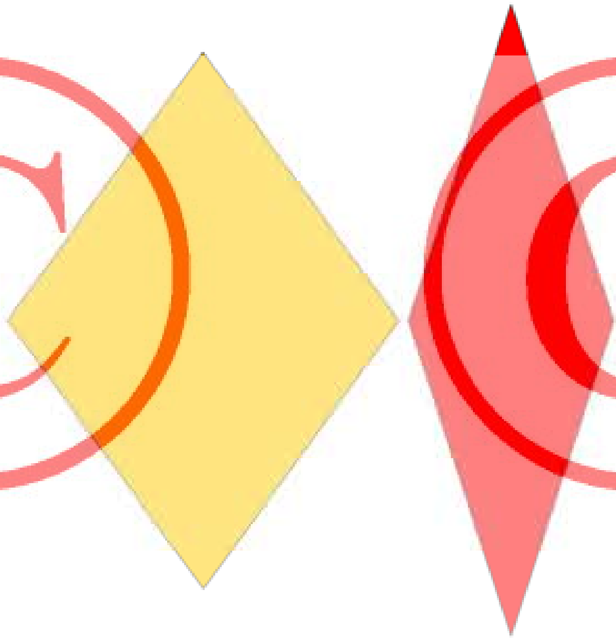
Markus Wurster

Inhalt

Impressum
Penrose-Parkett: Zwei Rauten
Markus Wurster © 2011 (1. Auflage)
www.markuswurster.de

Penrose-Parkett mit zwei Rauten

Lege eigene Muster mit den zwei Formen.
Lasse deine Fantasie spielen. Was sieht gut aus?

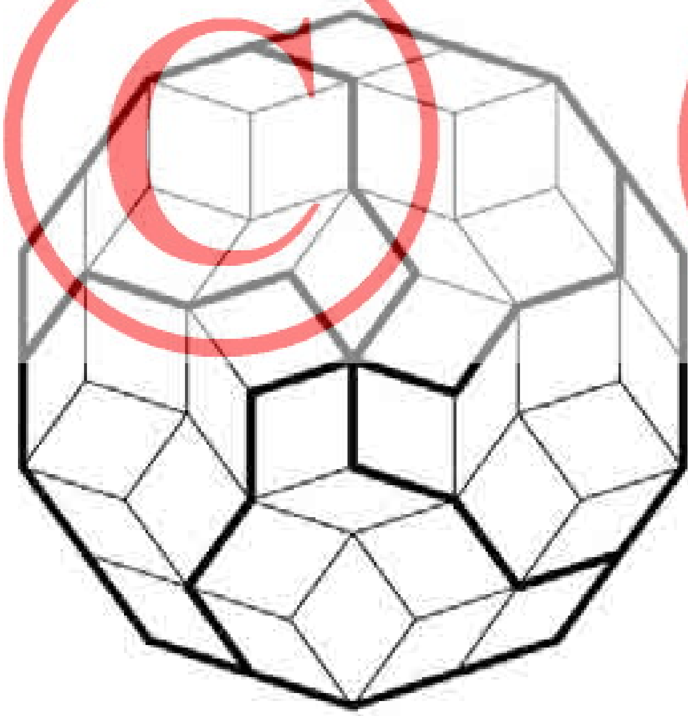


Man nennt solche Muster, bei denen man eine Fläche aus wenigen Grundformen lückenlos zusammensetzt, „Parkettierung“.
Man kann auch „Pflasterung“ oder „Kachelung“ dazu sagen, je nachdem ob man sich eher einen Fußboden, ein Straßenpflaster oder eine gekachelte Wand vorstellt. Im Englischen gibt es dazu den Begriff „Tilings“.

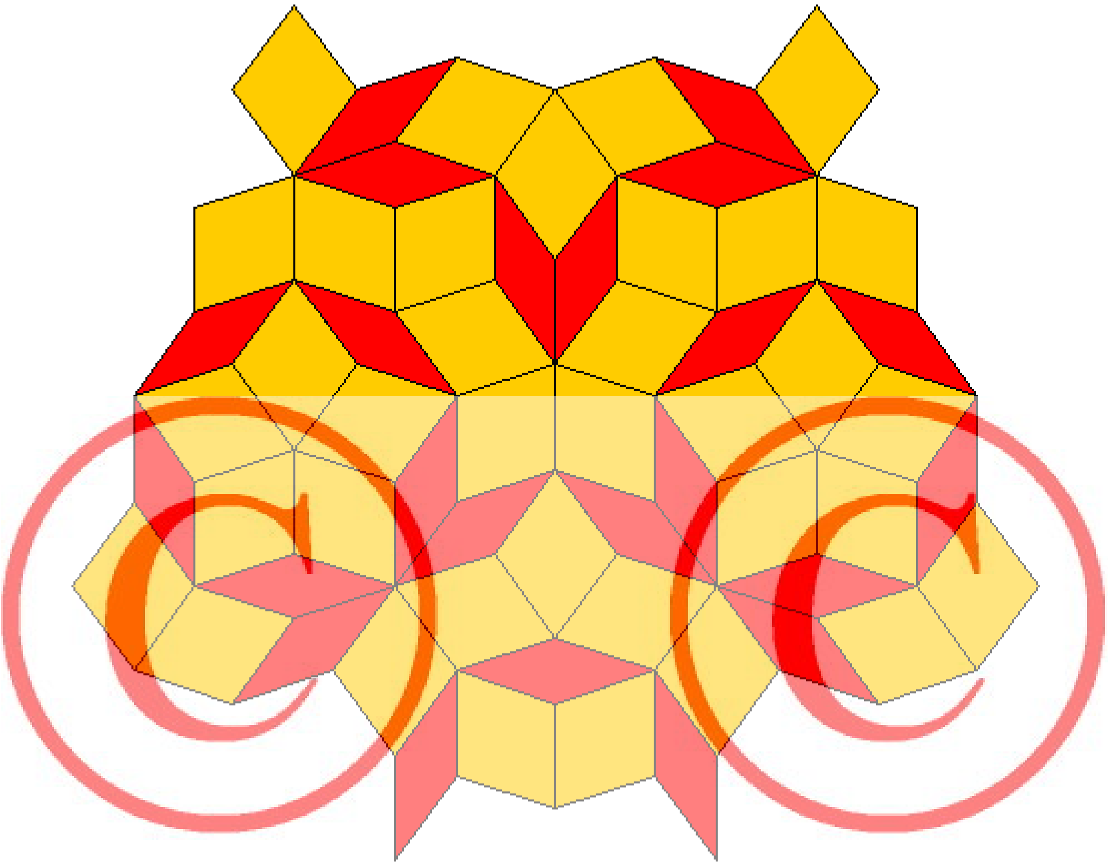
→ **Tipp:**
Verwende die Kopiervorlagen (farbig kopiert). Schneide die Formen aus und klebe dein Muster auf.

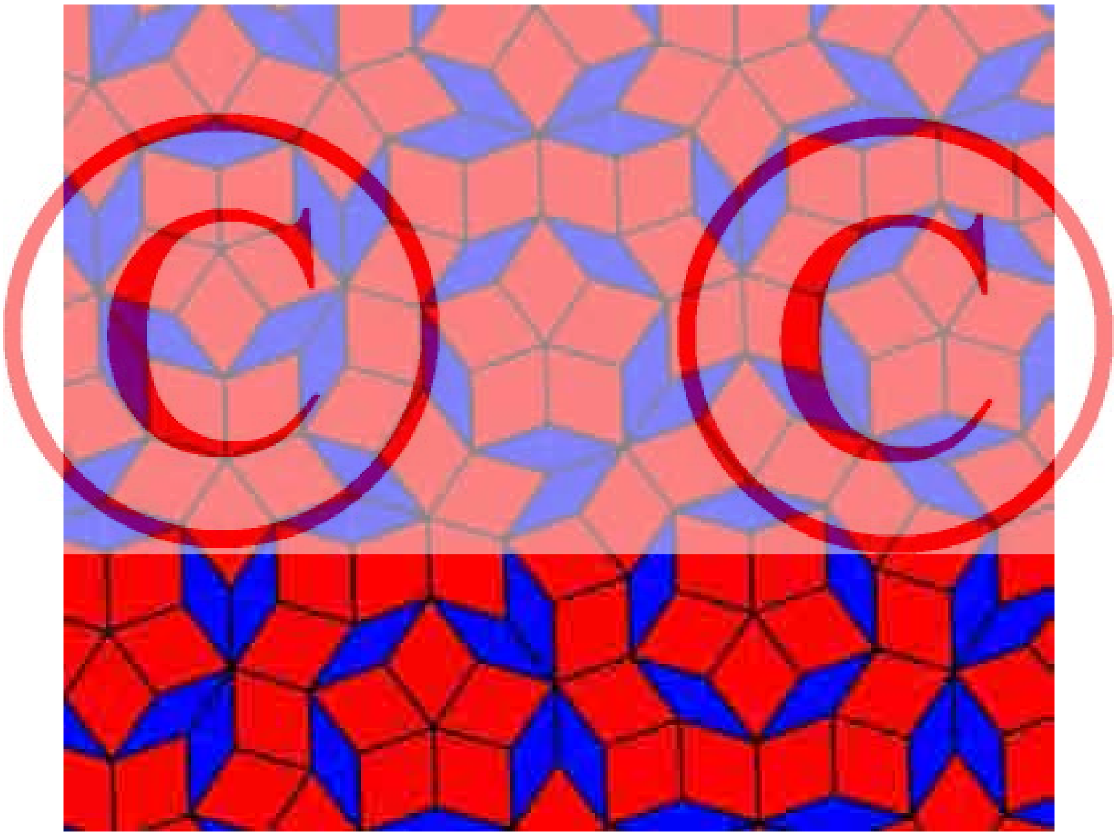
→ **Tipp:**
Du kannst auch die Beispiele auf den folgenden Seiten nachbauen.

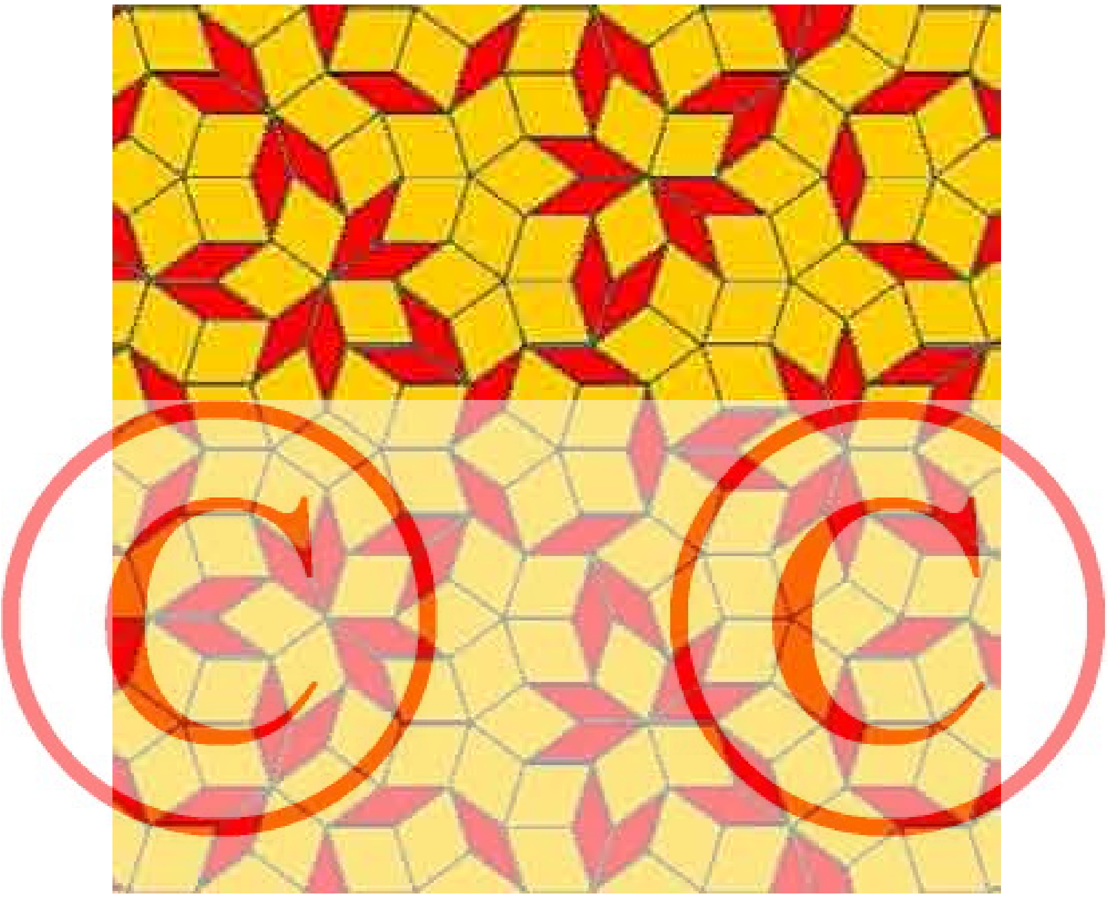
Musterbeispiele

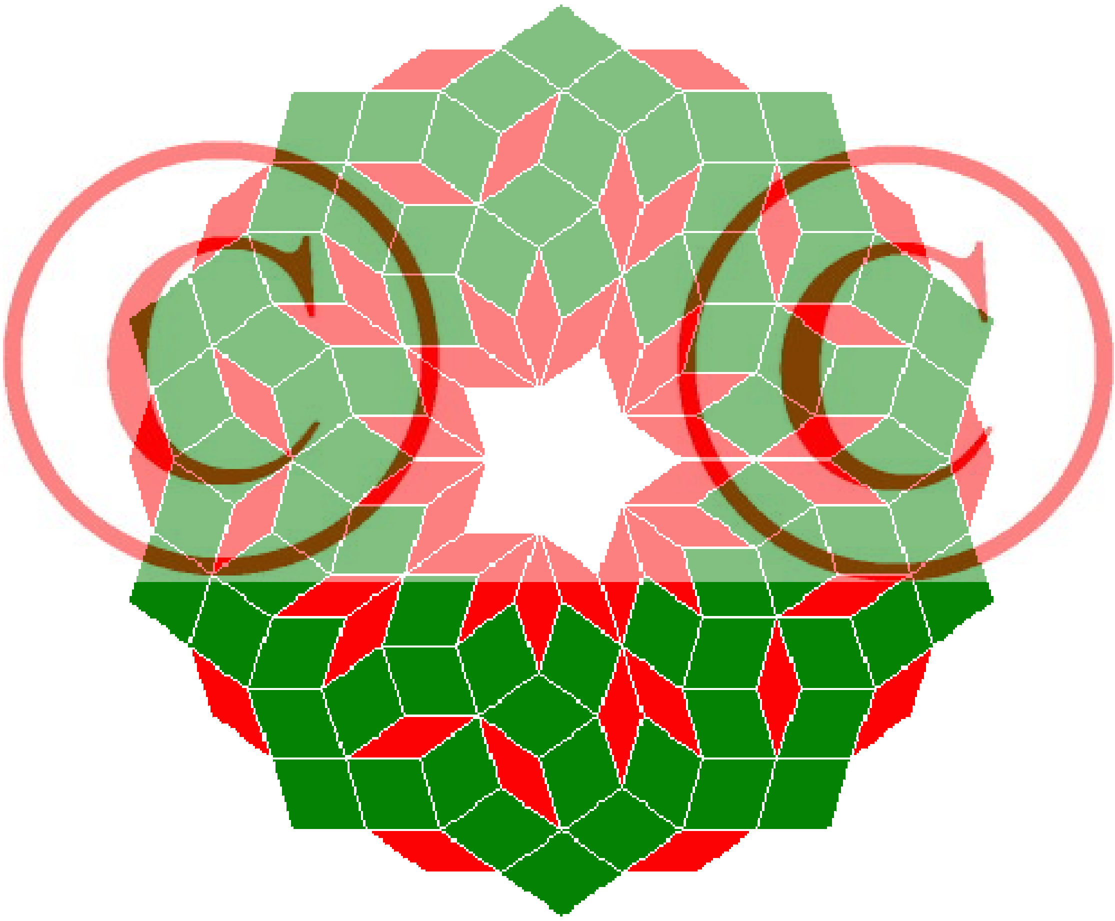


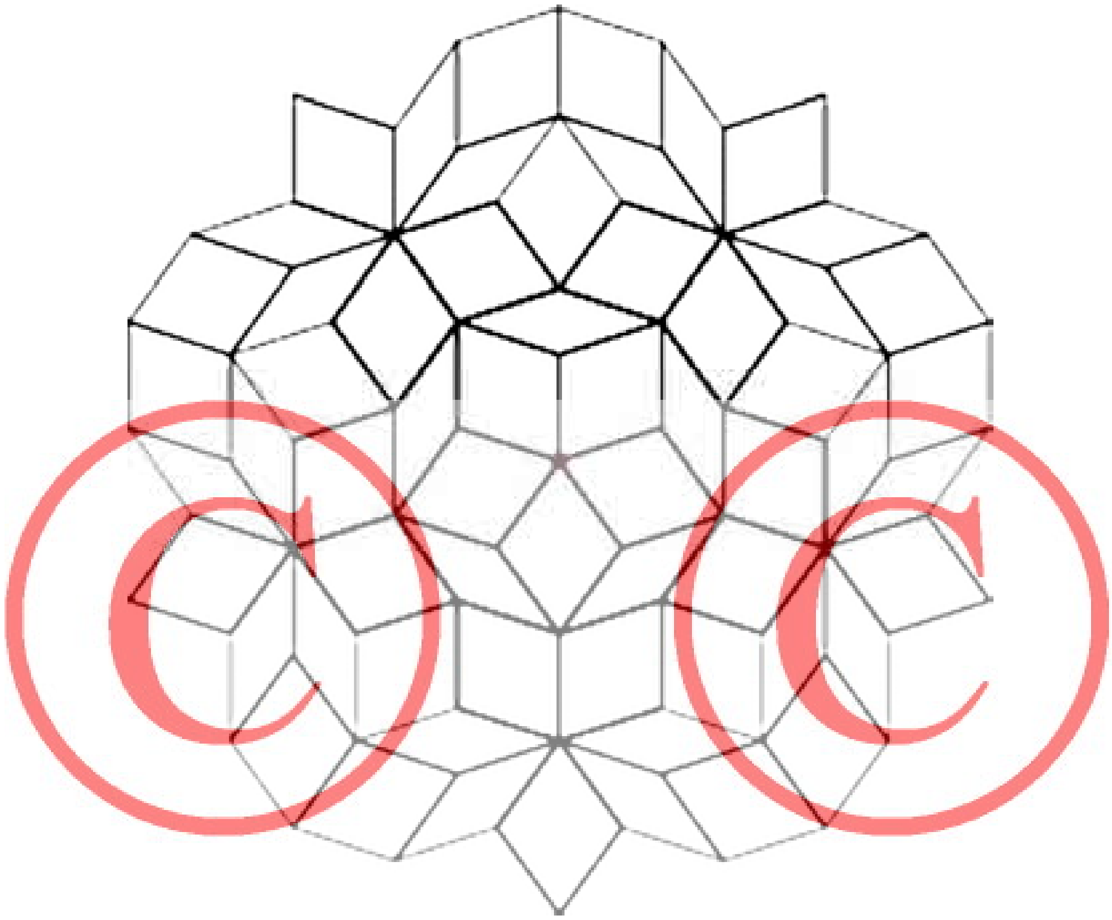
Die dicken Linien zeigen die Symmetrie bei vielen Penrose-Parketten – eine fünfzählige Rotationssymmetrie: Wenn man das Muster um 72° dreht, ist es mit dem Ursprung identisch.

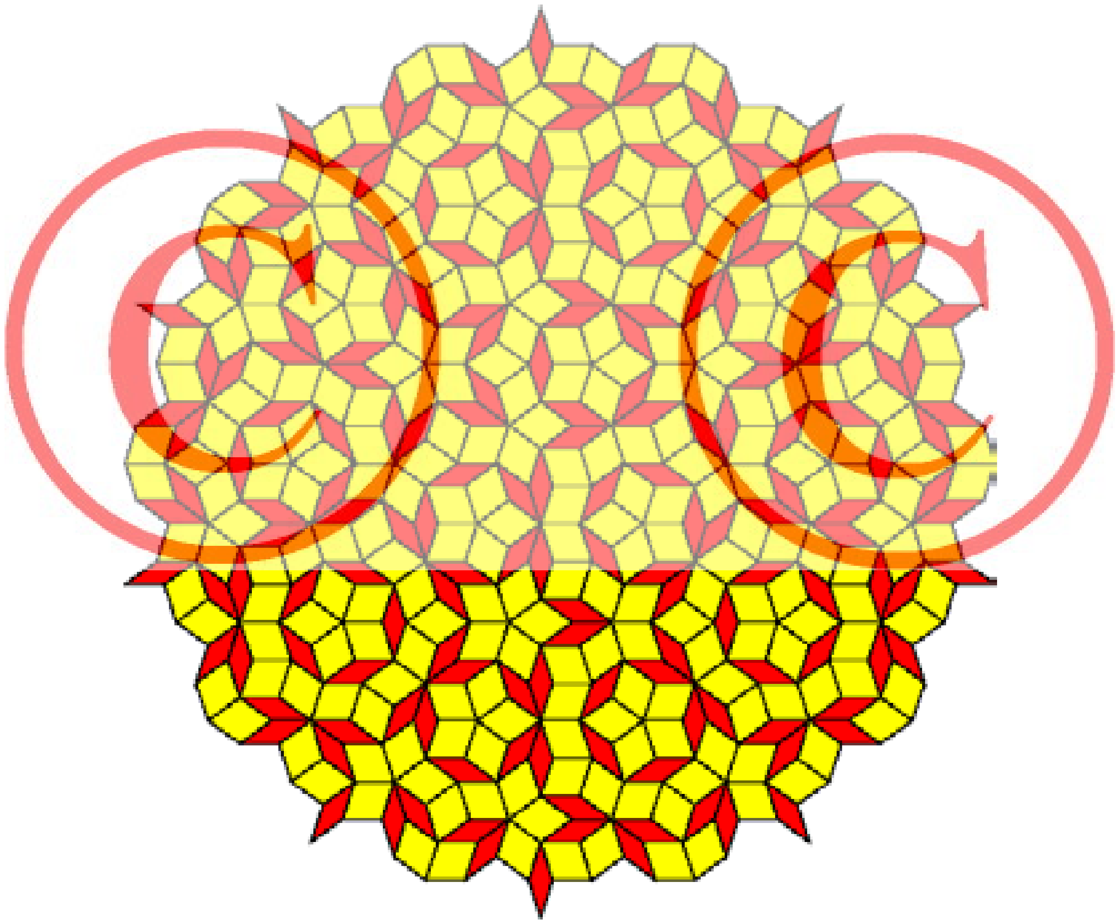


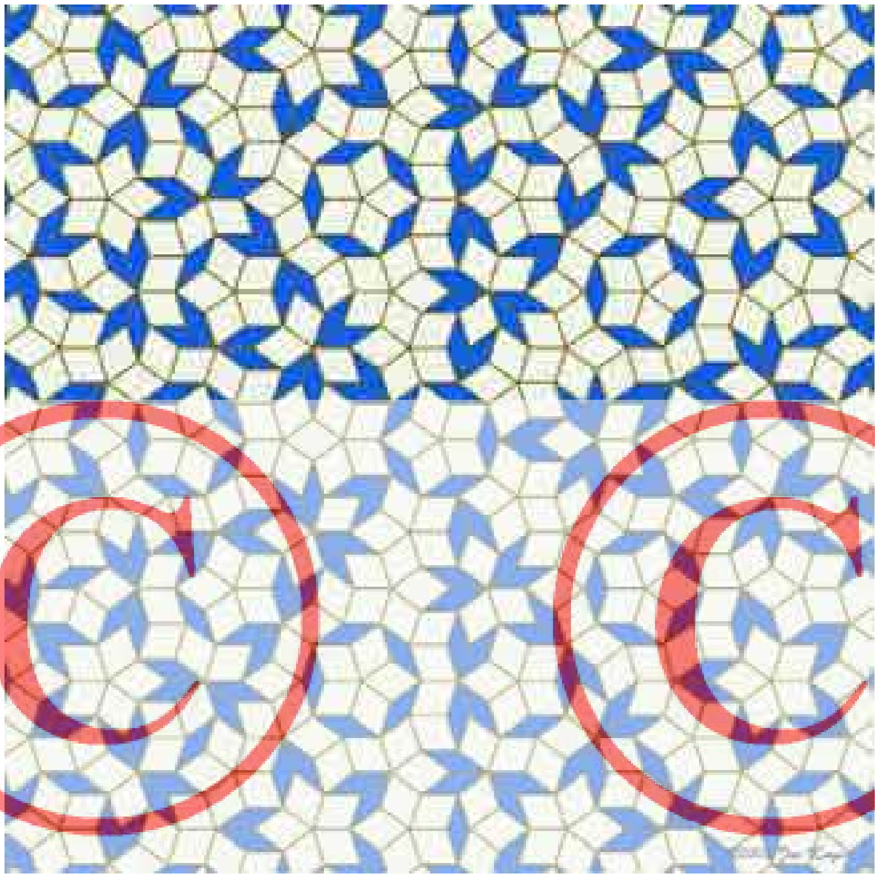


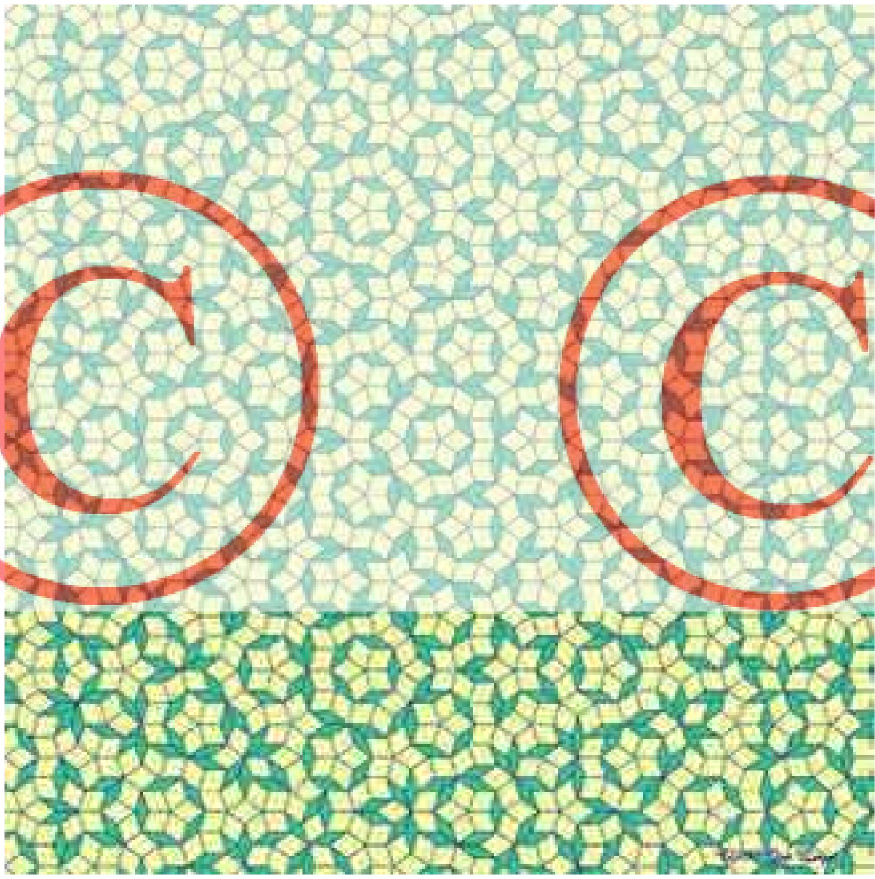


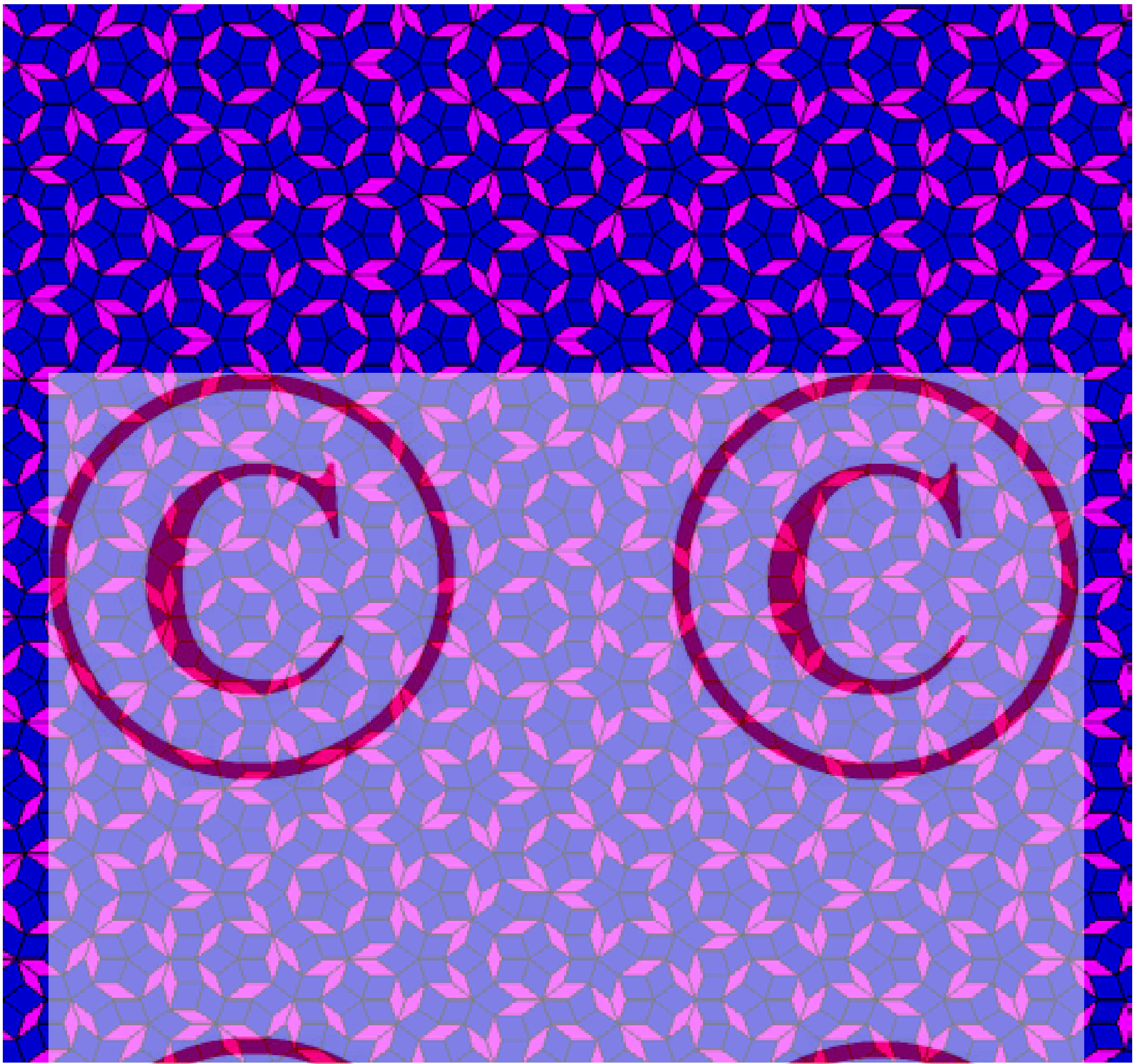










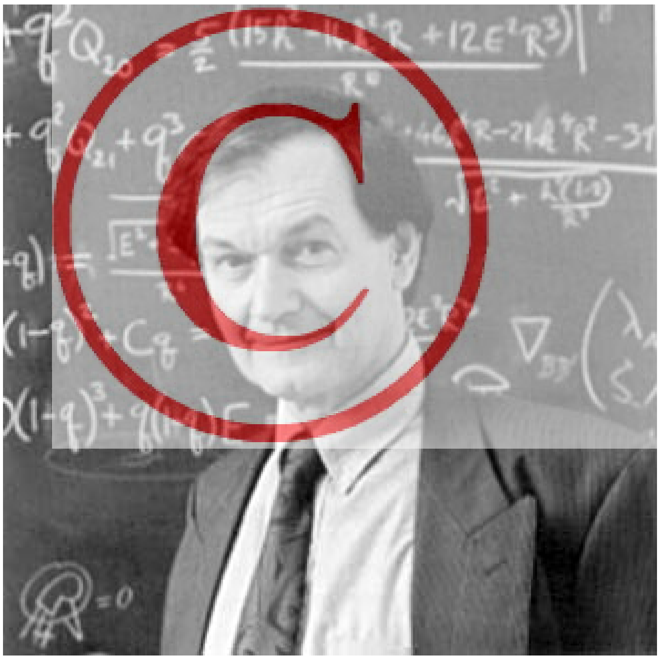


Penrose-Parkett

Man kann mit den zwei Formen lückenlos eine große Fläche auslegen.
Egal, welche Muster man erfindet – immer wieder tauchen markante Teilmuster auf. Mal sehen sie wie Sterne aus, mal wie Ringe oder Kreise.

Manchmal entstehen aus diesen Grundformen allerdings geheimnisvolle Muster, die „aperiodisch“ sind. Das bedeutet, dass sich ein Ausschnitt nie in regelmäßigen Abständen wiederholt.
Das ist bei herkömmlichen Mustern, wie bei den meisten Fliesen oder Parketten auf dem Fußboden, anders.

Roger Penrose hat die besonderen aperiodischen Muster intensiv erforscht. Man nennt solche Muster deshalb auch „Penrose-Muster“.

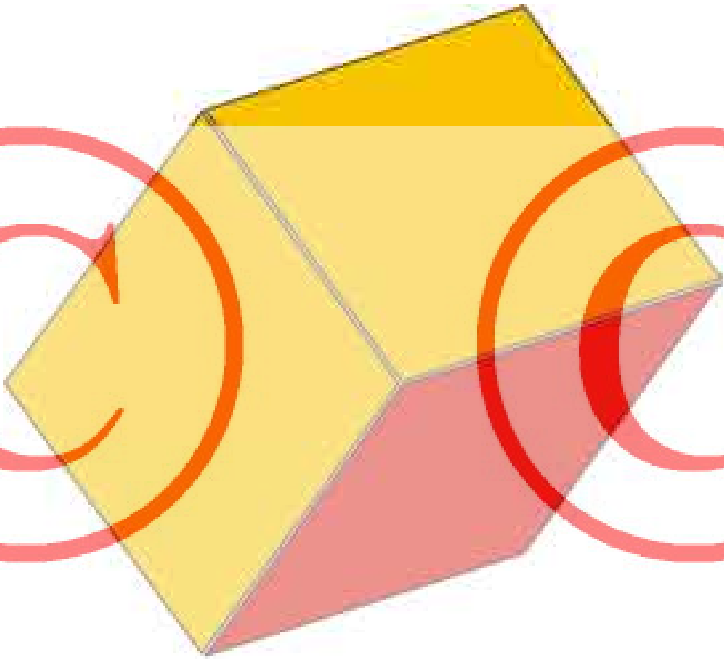

www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Penrose.html

Roger Penrose ist 1931 geboren und lebt in England.
Er ist fasziniert von der Schönheit geometrischer Muster.
Was ist das Schöne in der Mathematik?
Man sagt manchmal, das Schöne sei die Einfachheit.
Roger Penrose beschreibt es etwas genauer:

„Das Schöne in der Mathematik ist die *unerwartete* Einfachheit!“

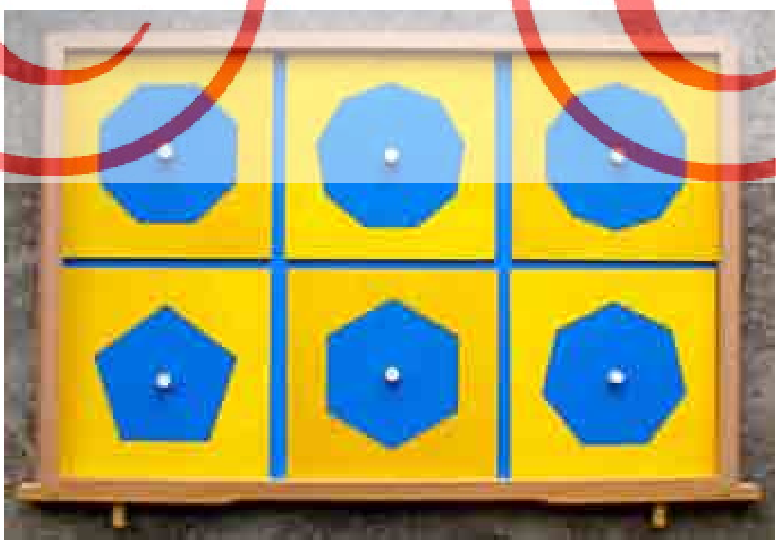
Zwei Rauten

Warum sind es genau diese beiden Rauten?



Wir kommen dieser geheimnisvollen Tatsache auf die Spur, wenn wir uns ein Zehneck näher betrachten.

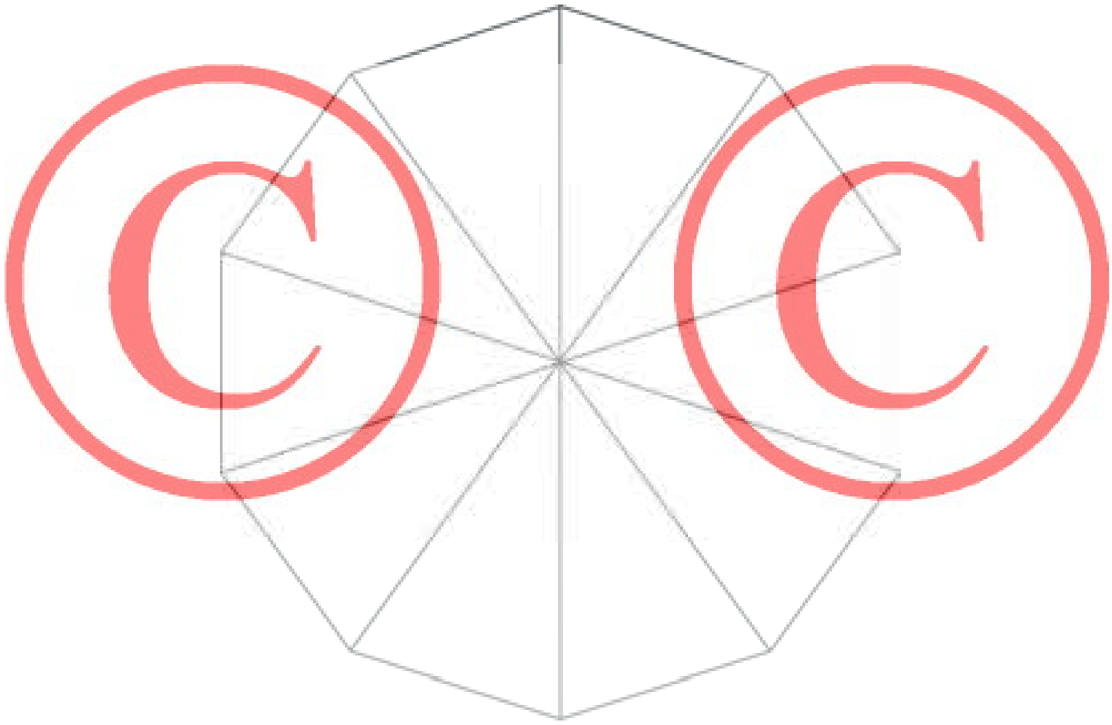
Hole dir das Zehneck aus der Geometrischen Kommode.



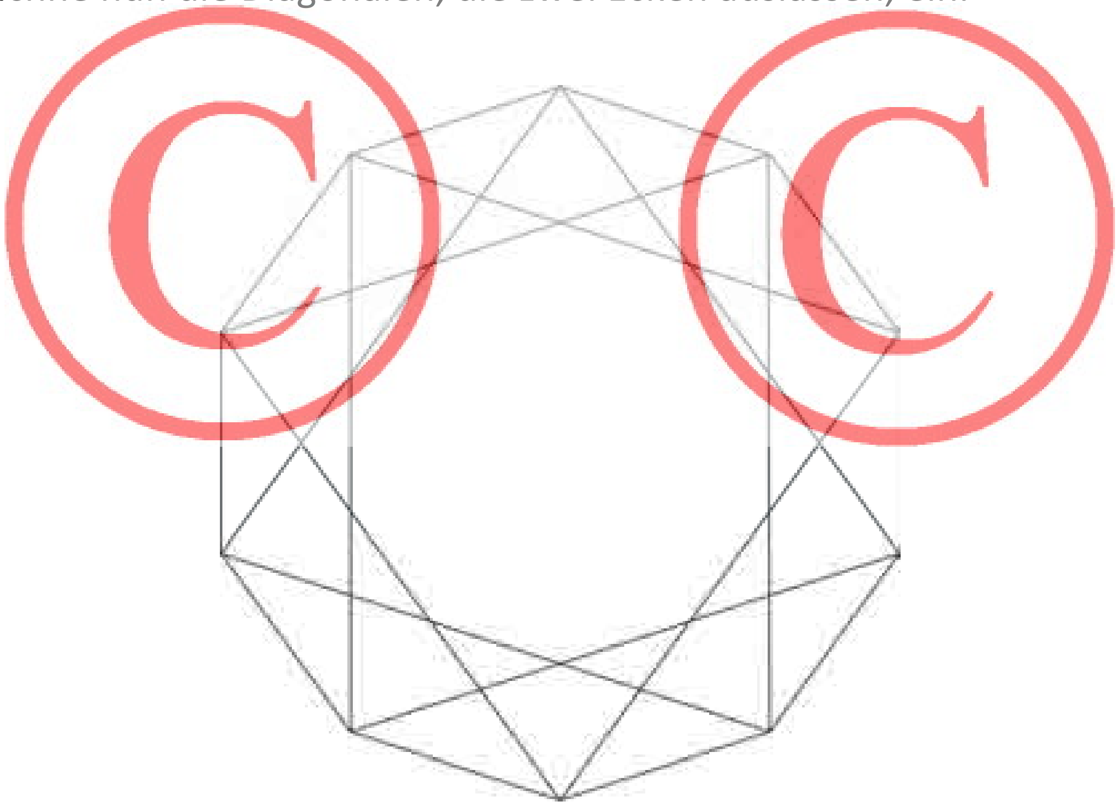
Penrose-Rauten im Zehneck

Zeichne mit der Schablone ein Zehneck.

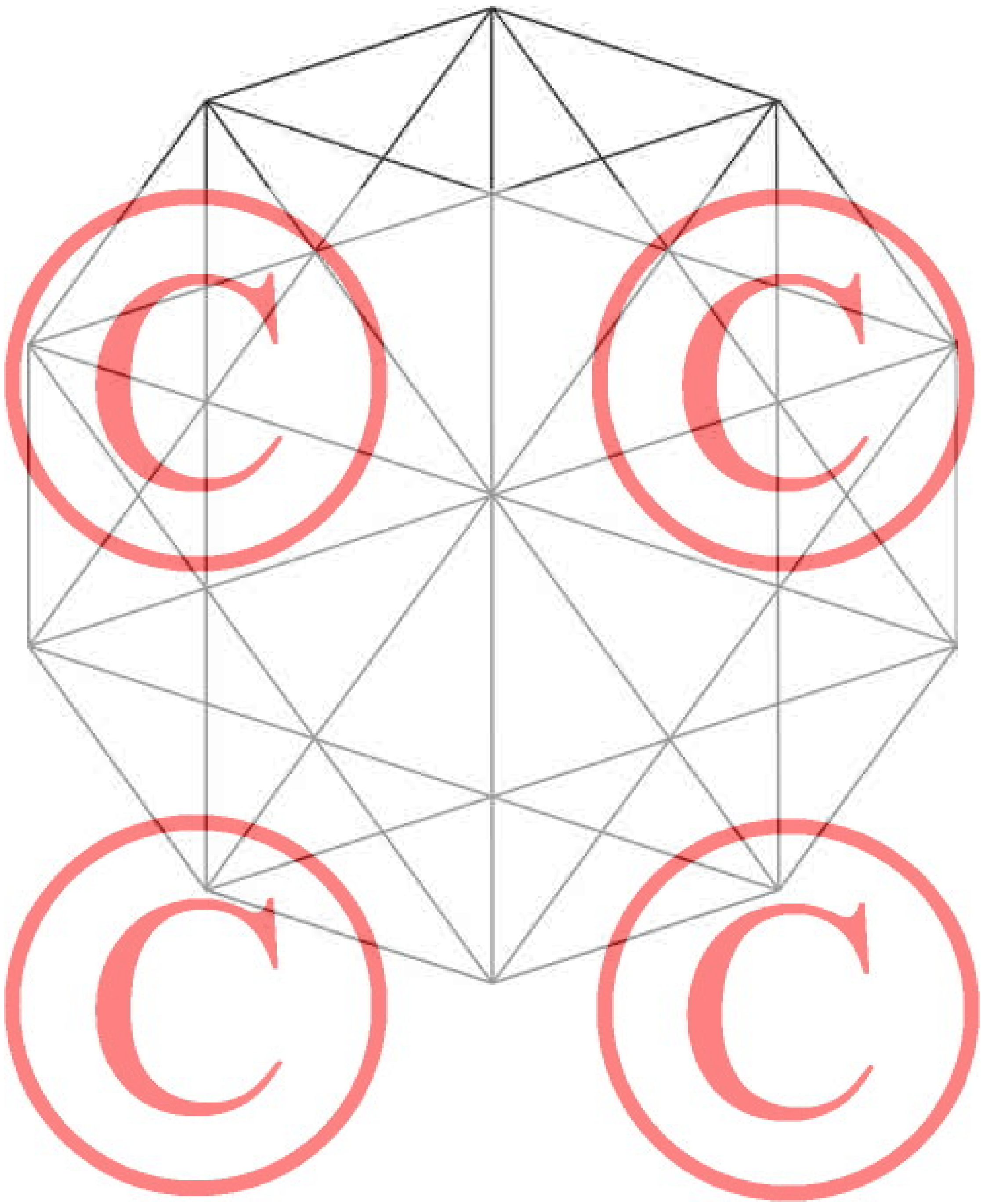
Zeichne die Diagonalen durch den Mittelpunkt ein.



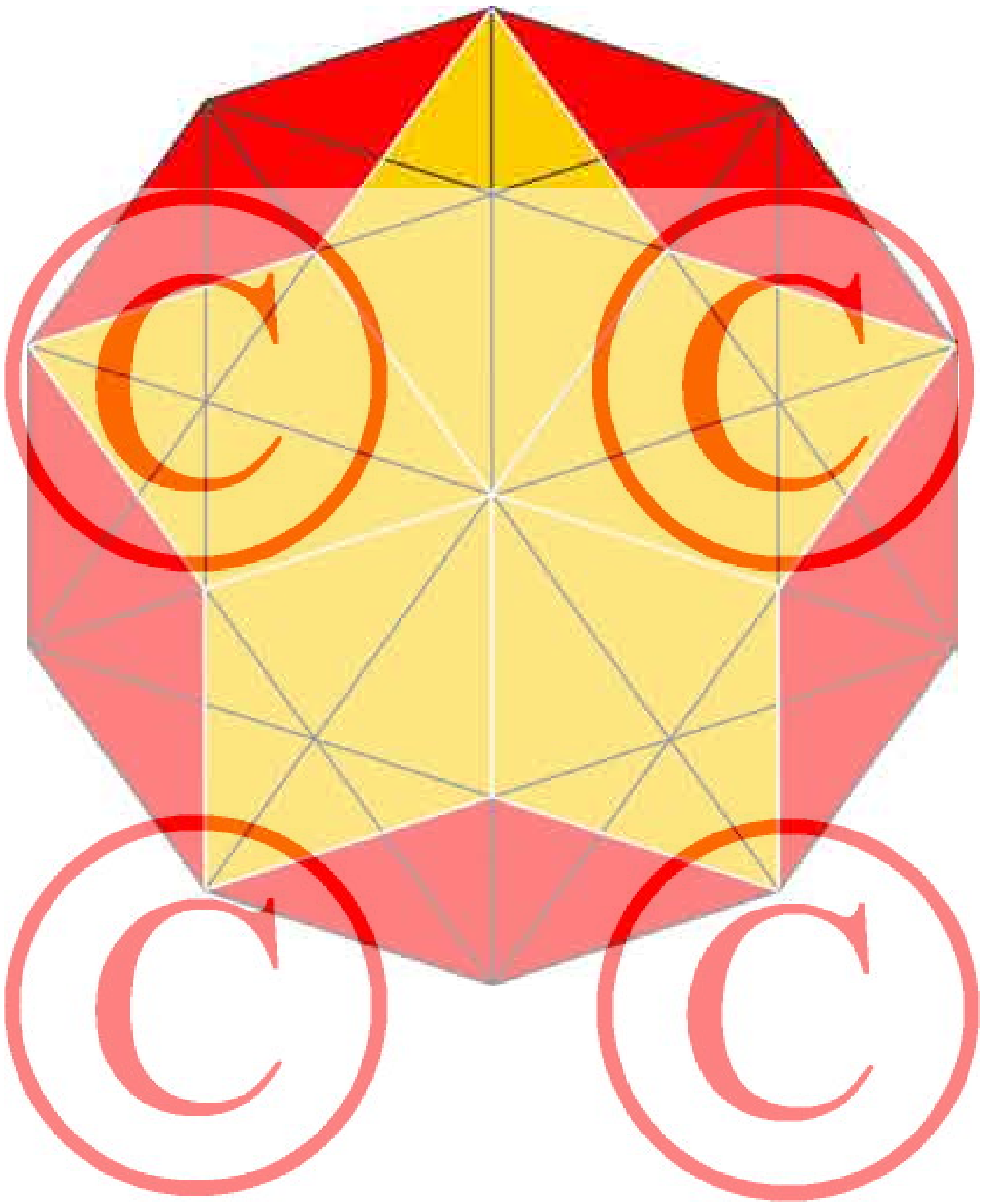
Zeichne nun die Diagonalen, die zwei Ecken auslassen, ein.



Findest du die beiden Rauten?



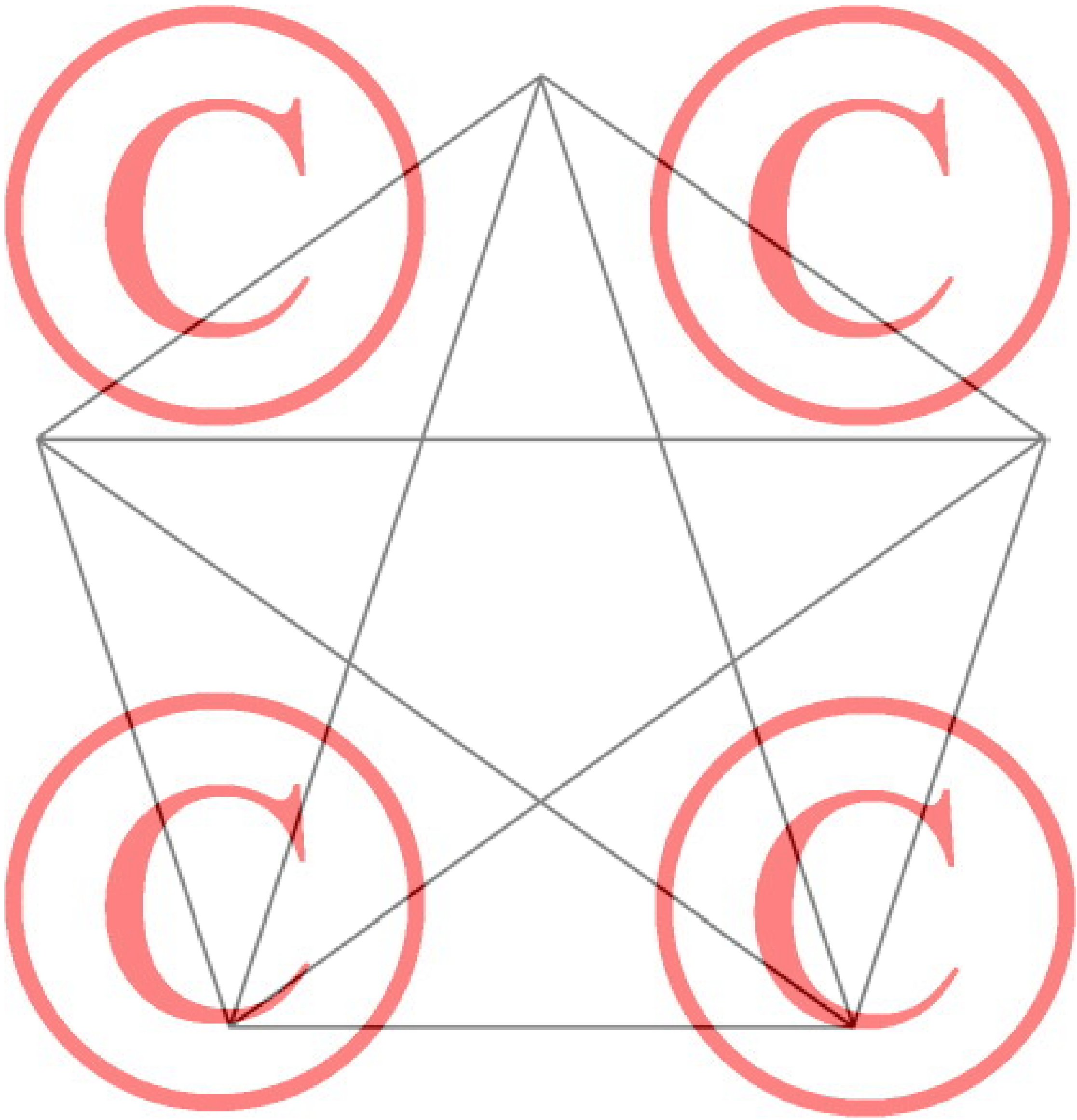
Lösung – zwei Rauten im Zehneck:



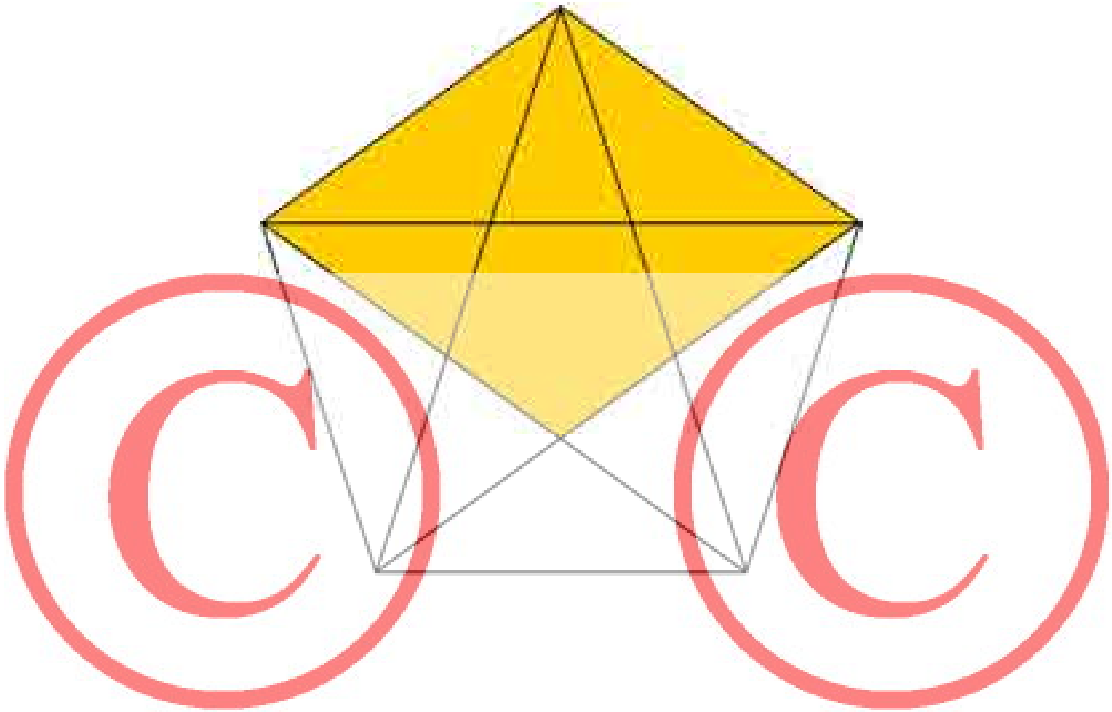
Penrose-Rauten im Fünfeck

Zeichne mit der Schablone ein Fünfeck. Zeichne alle Diagonalen ein.

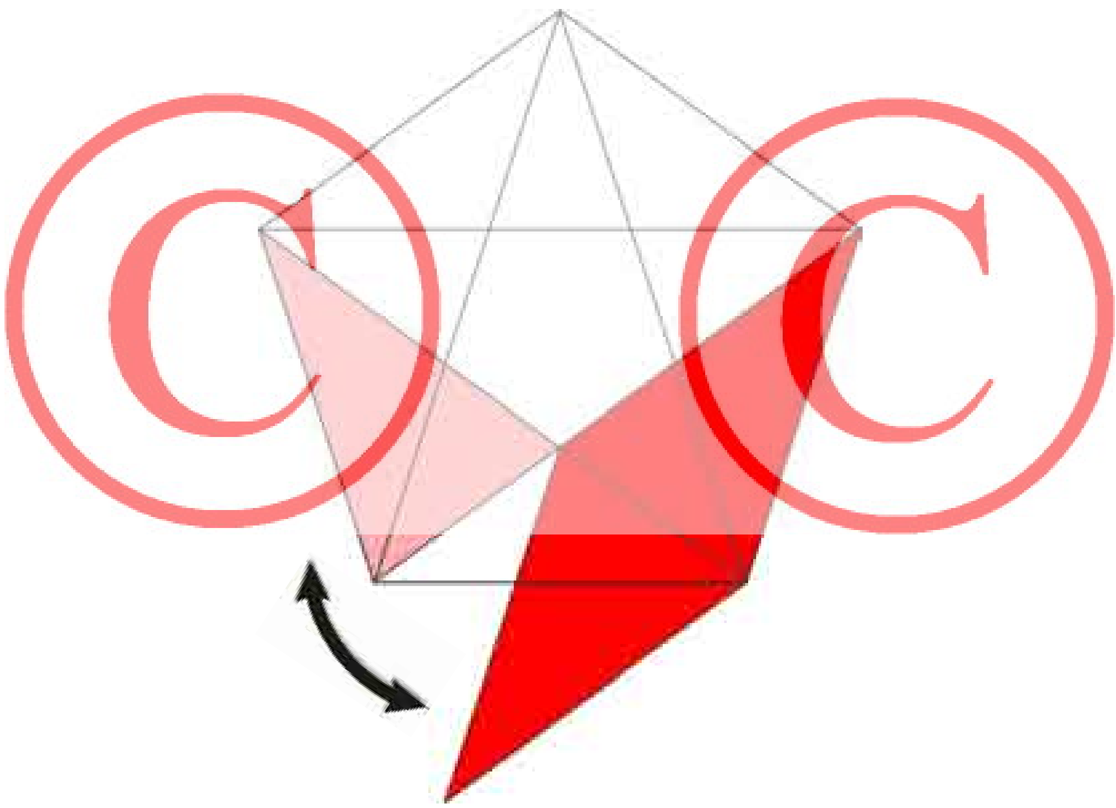
Findest du die beiden Rauten?



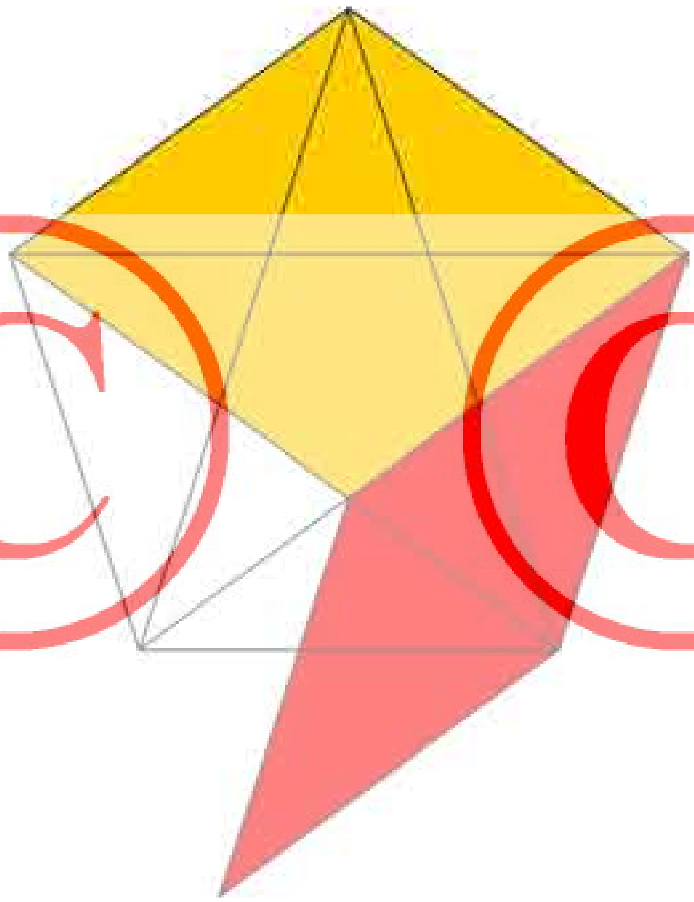
Die breite Raute ist einfach zu finden.



Für die schmale Raute brauchen wir etwas Fantasie.
Wir müssen auch etwas tricksen...



Breite und schmale Raute im Fünfeck:



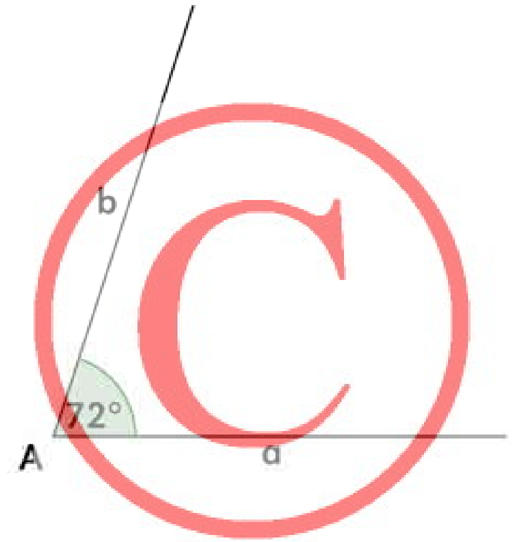
Du kannst das zusätzliche rote Dreieck auf zwei Methoden zeichnen:

1.
Mit dem Zirkel den Radius auf die Seitenlänge des Fünfecks einstellen und um die zwei Basispunkte des Dreiecks Kreise ziehen. Der Schnittpunkt ergibt den unteren Eckpunkt.

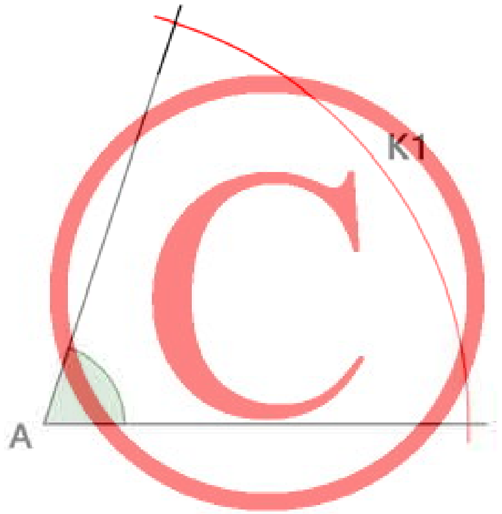
2.
Durch Parallelverschiebung mit Lineal und Geodreieck. Dazu werden die beiden langen Seiten des Dreiecks verschoben.

Konstruktion mit Zirkel und Lineal

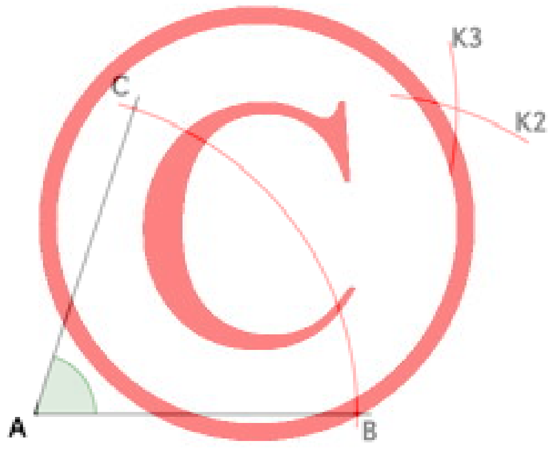
1. Breite Raute



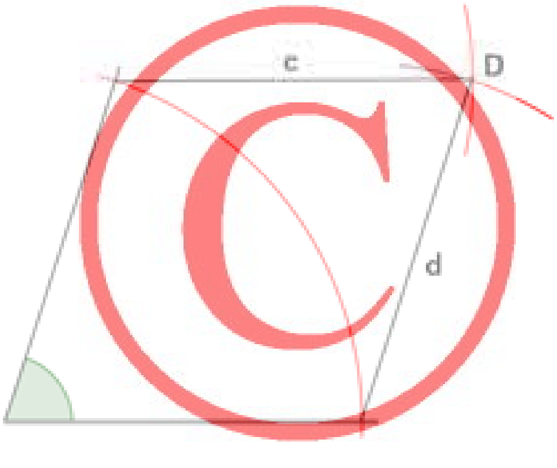
Beginne mit einer Strecke a.
Zeichne einen Winkel von 72°.



Ziehe einen Kreisbogen K1 um den Punkt A.

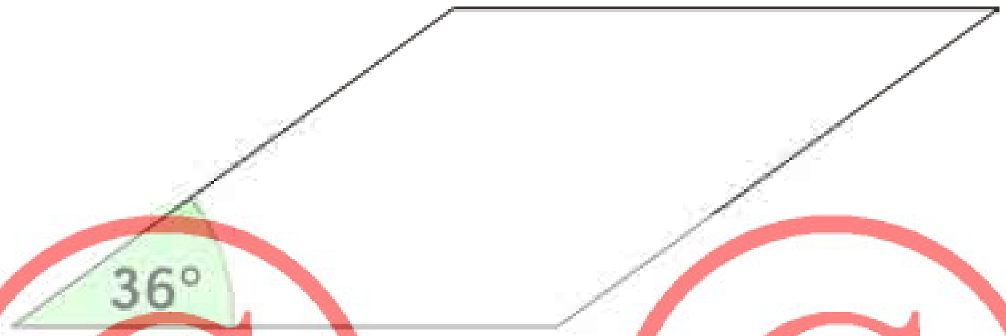


Ziehe nun mit demselben Radius die Kreisbögen K2 und K3 um die Punkte B und C.

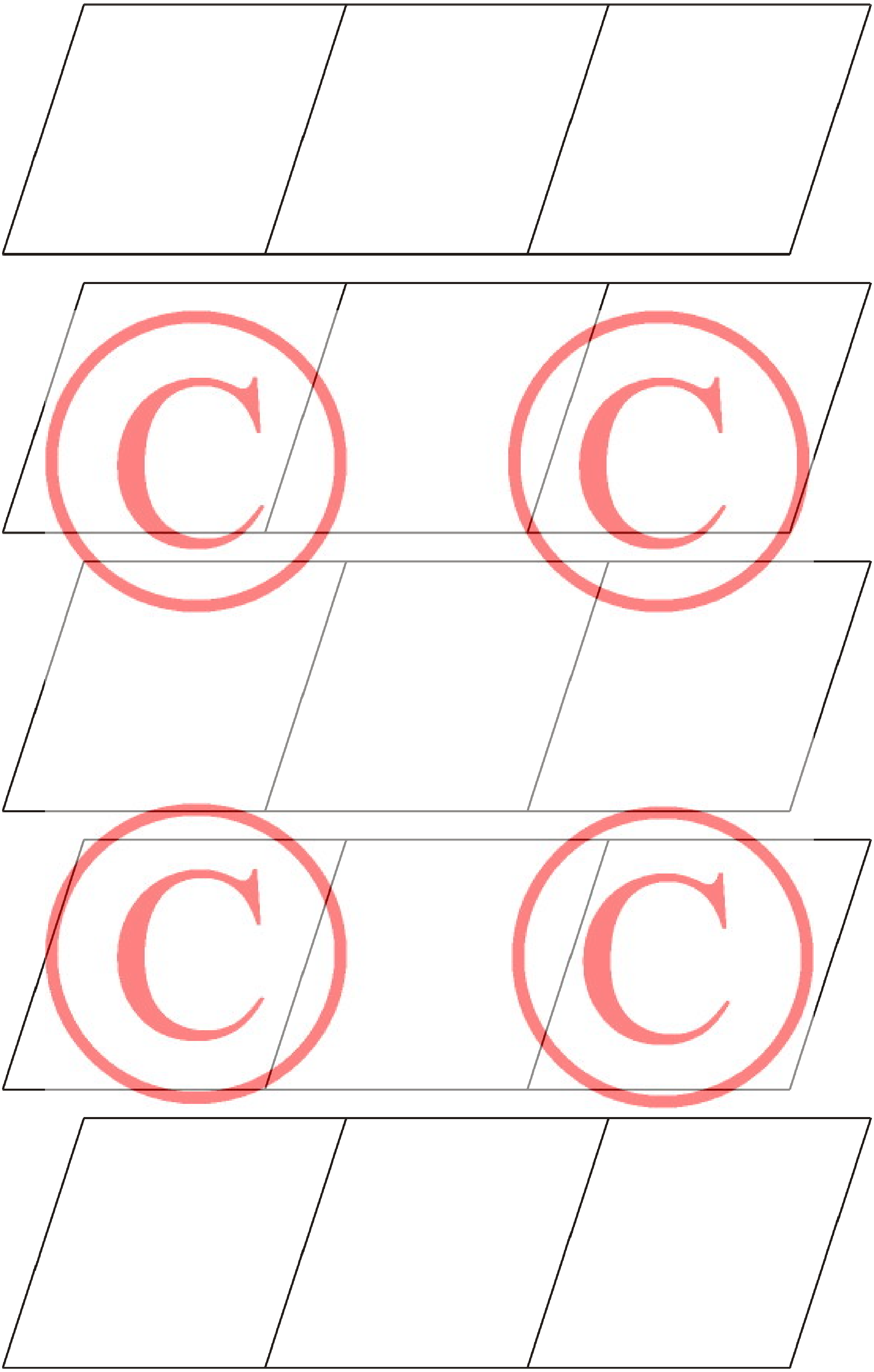


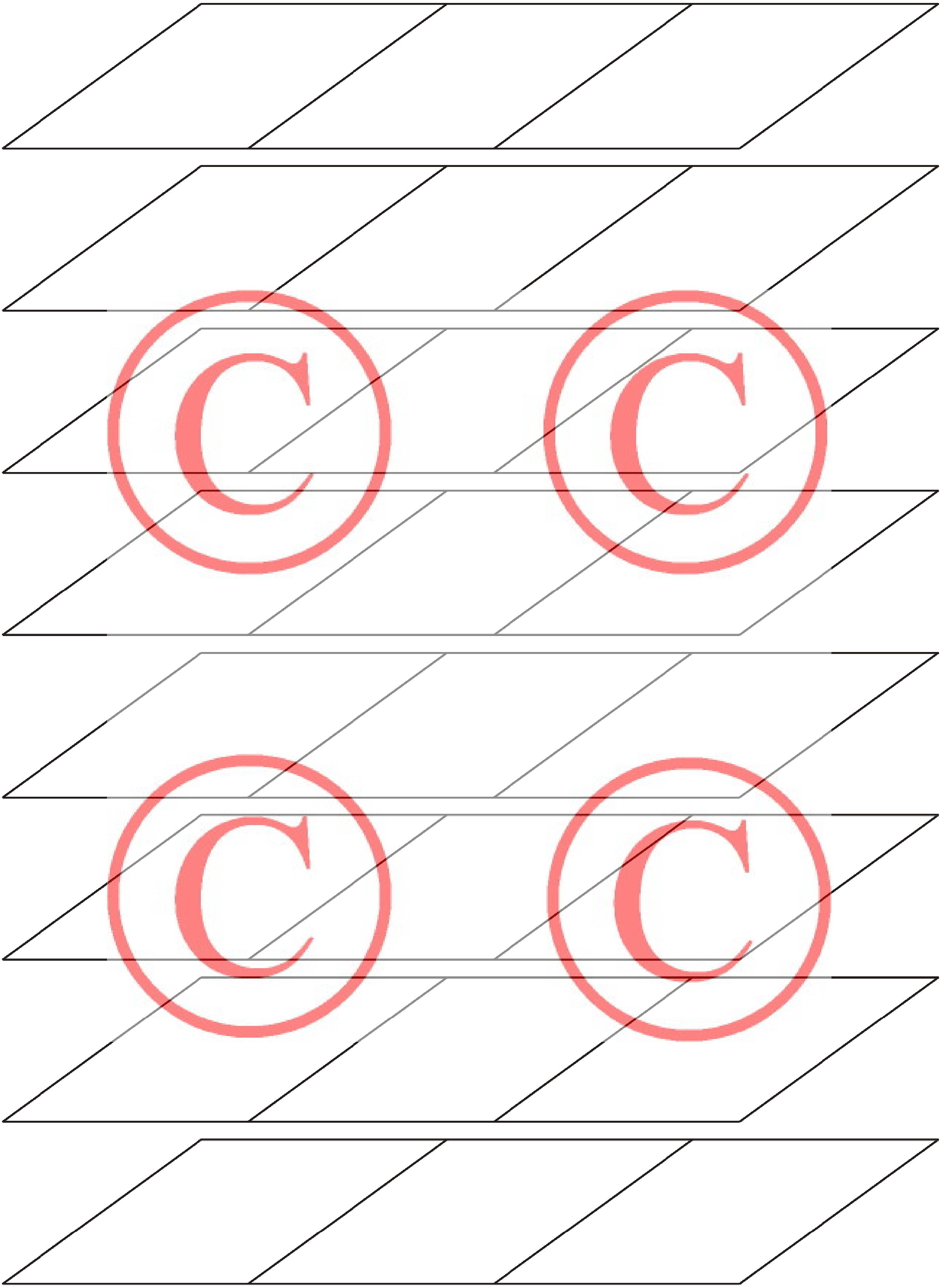
Vervollständige die Strecken c und d.
Nun haben wir eine Raute.

2. Schmale Raute



Diese Konstruktion kannst du jetzt alleine durchführen.





Anhang: Geometrie der Penrose-Parkette

Wenn man mit den Penrose-Kacheln (Zwei Rauten bzw. Drachen und Pfeil) ein Parkett legt, werden zunächst überwiegend Muster entstehen, die eine Symmetrie über eine Achse oder eine fünfzählige Rotationssymmetrie aufweisen.

Die Entdeckung von Roger Penrose in den 1970er Jahren lag darin, dass er mit diesen speziell ausgewählten Kachel-Paaren Muster realisierte, die eine Ebene lückenlos ausfüllen, ohne dass dabei ein Grundschema periodisch wiederholt werden müsste. Man nennt solche Muster „aperiodisch“. Dies meint, dass sich ein bestimmter Ausschnitt nie in regelmäßigen Abständen wiederholt. Bei herkömmlichen Parketten ist dies anders; sie sind in der Regel periodisch aufgebaut.

Damit ein Muster aperiodisch wird, braucht es eine ganz bestimmte Kombination von Kacheln und eine ganz bestimmte „Bauanleitung“. In den wissenschaftlichen Beschreibungen werden dazu die Seitenlinien in einer bestimmten Weise markiert, so dass nur bestimmte Seitenkombinationen erlaubt sind.

Aperiodische Parkette wurden anfangs (in den 60er Jahren) aus einer sehr großen Zahl verschiedener Kacheln konstruiert. Penrose gelang es, die Zahl der Kacheln auf zwei zu reduzieren. Ob eine einzelne Kachelform existiert, mit der sich nur aperiodische Parkettierungen realisieren lassen, ist unbekannt.

Lückenlose Muster, die sich regelmäßig wiederholen, sind nur mit Figuren möglich, die eine zwei-, drei-, vier- oder sechszählige Rotationssymmetrie aufweisen.
Ein Quadrat beispielsweise hat eine vierzählige Rotationssymmetrie, da man es nach einer Drehung um 90 Grad mit sich selbst zur Deckung bringen kann. Bei einem regelmäßigen Sechseck ist hingegen eine Drehung um 60 Grad nötig, deswegen ist seine Symmetrie sechszählig.

Man kann ein periodisches Muster um einen bestimmten Abstand so verschieben, dass jedes verschobene Teil genau die Stelle eines entsprechenden Teils im Originalmuster einnimmt. Der Begriff „quasiperiodisch“ beschreibt den Umstand, dass eine derartige Verschiebung nicht möglich ist, egal, welchen Abstand man wählt. Allerdings kann man hier jeden beliebigen Ausschnitt, egal welche Größe er hat, so verschieben, dass er (ggf. nach einer Rotation) deckungsgleich mit einem entsprechenden Ausschnitt ist.

Aperiodische Mosaiken lassen sich mit Fünf- und Zehnecken herstellen. Die vorgestellten Penrose-Paare stehen in einem Zusammenhang mit dem Zehneck. Die Rauten, Drachen und Pfeile lassen sich im Zehneck entdecken.

Aperiodische Parkettierungen wurden zuerst nur als interessante mathematische Struktur betrachtet, aber inzwischen wurden Materialien gefunden, in denen die Atome wie in Penrose-Kacheln angeordnet sind. Diese Materialien können keine periodischen Kristalle bilden, aber Quasikristalle, da sich die Muster „fast“ wiederholen.

Bei einer Reise durch Usbekistan 2007 fielen Peter Lu von der Harvard-Universität, der auf dem Gebiet der Quasikristalle arbeitet, an einem Gebäude Kachelornamente auf, die ihn an Penrose-Parkettierungen erinnerten. (Hierzu habe ich, MW, das Material „Girih-Parkette“ ausgearbeitet.) Bei der Sichtung vieler Fotografien stieß er auf Arbeiten im Darb-i-Imam-Schrein in Isfahan, Iran, aus dem 15. Jahrhundert, welche die Ergebnisse von Penrose vorwegzunehmen scheinen.

Diese Kachelornamentik hat klar ersichtlich ihre Anfänge im Sinne von sich nicht wiederholenden unendlichen Parkettierungen bereits ab dem 12. Jahrhundert, wobei ein Satz mit fünf einfach zu konstruierenden Grundformen, die sogenannten Girih-Kacheln, zum Einsatz kam. Anders als z. B. für keltische Knoten, bei denen die Konstruktion der Muster nachvollziehbar ist, liegen für die Methoden zur konstruktiven Mustererzeugung in diesem Fall aber noch keine Anhaltspunkte vor. Derzeit sind noch keinerlei Funde von Schablonen bekannt, welche die angesprochenen Grundformen repräsentieren. Einerseits hätte man sie in früheren Jahren der archäologischen Forschung wohl nur schwer als solche erkennen können, andererseits besteht auch die Möglichkeit, dass diese nicht dauerhaft genug waren oder eventuell sogar nach den Arbeiten zerstört wurden. Der Einsatz eines solchen Systems belegt zumindest, dass die Anwendung desselben verstanden und beherrscht wurde und für die Ornamentik-Arbeiten gezielt benutzt wurde. Inwieweit dies ein Hinweis auf ein tiefer gehendes, mathematisches Verständnis der Beteiligten im Bereich der Strukturen und Muster ist, ist derzeit offen.

Quellen:

Artikel aus Wikipedia: „Roger Penrose“, „Penrose-Parkett“ und „Quasikristall“

http://science.orf.at/science/news/147351